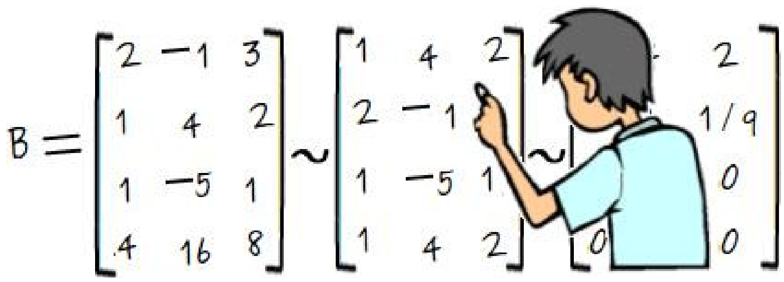
2015

Álgebra Linear COMAT
Coordenadoria de Matemática



COMAT

IFSUL CAMPUS PELOTAS

01/01/2015

INSTITUTO FEDERAL
SUL-RIO-GRANDENSE

COLABORADORES:

DAVI TAIRA FERREIRA
GILMAR DE OLIVEIRA GOMES
JAIR VIGNOLLE DA SILVA
LISIANE MENESES
MARIA DA GRAÇA PERAÇA
ODAIR ANTONIO NOSKOSKI
RAFAEL MONTOITO
SILVANA L. P. IAHNKE

EMENTA

Matrizes, determinantes e sistemas lineares. Espaços vetoriais. Espaços vetoriais Euclidianos. Transformações Lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização de operadores. Forma canônica de Jordan.

CONTEÚDO

1 MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

2 ESPAÇOS VETORIAIS

3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

4 AUTOVALORES E AUTOVETORES

5 SEMELHANÇA E DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

6 POLINÔMIO MÍNIMO E FORMA CANÔNICA DE JORDAN

7 PRODUTO INTERNO

BIBLIOGRAFIA:

- STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P., Álgebra Linear. São Paulo: Makron Books,
- LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear. São Paulo: Makron Books, 1994 (Coleção Schaum)
- CALLIOLI, C. A., Álgebra Linear.
- BOLDRINI, J. L., Álgebra Linear. Editora Harba
- HOFFMAN, K., Álgebra Linear.
- POOLE, D., Álgebra Linear.
- ANTON, H., Álgebra Linear.
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html

1

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

1.1 MATRIZES

1.1.1 Definição: Uma matriz **A** $(m \times n)$ de entradas reais é uma lista de $m.n$ números organizados em uma tabela com m linhas e n colunas.

As linhas de uma matriz são enumeradas de cima para baixo, e as colunas são enumeradas da esquerda para a direita. Um elemento genérico de uma matriz **A** é denotado por a_{ij} onde i representa a linha e j representa a coluna no qual esse elemento pertence.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

1.1.2 Exemplos:

a) A matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ onde $a_{ij} = i + j$ é representada por $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $C = [5]$ é uma matriz 1×1.

1.1.3 Definição: Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{r\times s}$ são iguais, $A = B$, se elas têm o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$, e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

1.1.4 Classificação de Matrizes

a) Matriz linha é uma matriz formada por uma única linha.

Exemplo: **A** = $[3 \quad 6 \quad 9]$, matriz do tipo 1x3

b) Matriz coluna é a matriz formada por uma única coluna.

Exemplo: **A** = $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, matriz do tipo 4x1

c) Matriz zero (nula) é a matriz com todas suas entradas nulas. Uma matriz zero sempre será denotada por **0**.

Exemplo: $\mathbf{0}_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) Matriz quadrada é aquela que possui o número de linhas igual ao número de colunas. Uma matriz quadrada nxn é chamada de matriz de ordem n.

Exemplo: **A** = $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$, matriz de ordem 2

e) Matriz diagonal é toda matriz quadrada em que todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos. Caso todos os elementos da diagonal principal sejam iguais a 1, esta matriz é denominada matriz identidade, sendo representada por I.

Exemplo: Matriz diagonal **A** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$; matriz identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) Matriz transposta é a matriz que se obtém transformando ordenadamente cada linha de **A** em coluna e vice-versa. Denota-se $\mathbf{A}^T$.

Exemplo: **A** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$, $A = [a_{ij}]$ $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $A^T = [a_{ji}]$

g) Matriz triangular superior é a matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos ($a_{ij} = 0$, para $i > j$). Já na **matriz triangular inferior**, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos ($a_{ij} = 0$, para $i < j$).

Exemplo: As matrizes S e F são triangulares superior e inferior, respectivamente, dadas por

$$S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ w & r & s \end{bmatrix}$$

h) Matriz simétrica é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$.

Propriedade: Uma matriz M é simétrica $\Leftrightarrow$ $M = M^t$

Exemplo: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

i) Matriz anti-simétrica é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = -a_{ji}$.

Propriedade: Uma matriz M é anti-simétrica $\Leftrightarrow$ $M = -M^t$

Exemplo: $\begin{bmatrix} a & b & c \\ -b & d & e \\ -c & -e & f \end{bmatrix}$

1.1.5 Operações com matrizes

a) Adição e subtração: A adição e subtração de duas matrizes A e B, do mesmo tipo, é efetuada somando-se os seus elementos correspondentes.

i) $C = A + B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, com $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ e $j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

ii) $C = A - B \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, com $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ e $j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

b) Multiplicação de um número real por uma matriz: multiplica-se todos os elementos da matriz pelo número.

$B = k \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, com $k \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,\cdots,m\}$ e $j \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $k = 3$, então $3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

c) Produto de matriz por matriz

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{n\times r}$, denomina-se produto de A por B a matriz $C = (c_{ij})_{m\times r}$, tal que o elemento c_{ij} é a soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna de B. Neste caso, $AB = C$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

A condição para que o produto entre matrizes seja realizado é que o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$A_{m\times n} B_{n\times r} = C_{m\times r}$$

Observação: Em geral $AB \neq BA$, mesmo para matrizes quadradas de mesma ordem.

1.1.6 Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Então $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{3\times 3}$ e $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note que $AB = 0$, sem que $A = 0$ ou $B = 0$.

1.1.7 Propriedades matriciais

Supondo que os tamanhos das matrizes A, B, C são tais que as operações indicadas podem ser efetuadas, valem as seguintes propriedades.

Considere a, b, c números reais e **I** e **0,** as matrizes identidade e nula, respectivamente.

(a) **A + B = B + A** Comutatividade da adição

(b) **A + (B + C) = (A + B) + C** Associatividade da adição

(c) **A(BC) = (AB)C** Associatividade da multiplicação

(d) **A(B $\pm$ C) = AB $\pm$ AC** Distributividade à esquerda

(e) **(A $\pm$ B)C = AC $\pm$ BC** Distributividade à direita

(f) a**(B $\pm$ C) =** a**B** $\pm$ a**C**

(g) (a $\pm$ b)**C** = a**C** $\pm$ b**C**

(h) a(b**C**) = (ab)**C**

(i) a(**BC**) = (a**B**)**C** = **B**(a**C**)

(j) $(A^t)^t = A$, ou seja, a transposta da transposta da matriz **A** é igual a matriz **A**.

(k) $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

(l) $(AB)^t = B^tA^t$

(m) **AI = IA = A**

(n) **A0 = 0A = 0**

1.1.8 Matriz inversa

Uma matriz quadrada **A** de ordem n é inversível se, e somente se, existir uma matriz **B** tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Desta forma, para a matriz **B,** utiliza-se a seguinte notação: $B = A^{-1}$ (lê-se **B** é igual à inversa de **A**).

Nota: Pode ser utilizado a palavra **invertível** no lugar de **inversível**.

- **Exercício**: Verifique que as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ são inversíveis entre si.

1.1.9 Exemplo: Mostre que a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ não é inversível.

Resolução: Suponha que M tenha como inversa $M' = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$. Da equação $MM' = I$ segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

da qual obtêm-se as equações

$$w + 2y = 1$$

$$x + 2z = 0$$

$$2w + 4y = 0$$

$$2x + 4z = 1$$

Subtraindo duas vezes a primeira equação da terceira, obtêm-se $0 = -2$ (Absurdo!). Logo não existe solução para o sistema.

1.1.10 Definição: O determinante da matriz A é denotado por $\det(A)$.

a) Se $A = [a]$ é uma matriz de ordem 1 então $\det(A) = a$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem 2 então $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Posteriormente, será abordado o cálculo do determinante de uma matriz de ordem $n > 2$.

1.1.11 Exemplo: Determine a inversa da matriz **A** = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução: Esta matriz tem inversa, pois det(**A**) $\neq 0$.

Procuremos sua inversa tal que **A.B** = **I** e **B.A** = **I**.

Sendo $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e impondo a primeira condição temos, $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, $\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, resulta em: a = 2, b = -1, c = -11/ 2, d = 3

Teremos então, **A.B** = $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, **A.B = I.**

Também vale **B.A** = **I** (Verifique!).

Portanto, **B** = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-11}{2} & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz inversa de **A.**

◆ **Exercício**: Dado a matriz $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $ad - bc \neq 0$, determine a inversa A^{-1}.

Sugestão: Seja $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Encontre a inversa A^{-1} resolvendo o sistema $AM = I$, onde I é a matriz identidade. Posteriormente, confira se $MA = I$.

Resposta: $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

1.1.12 Regra geral: Se $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $ad - bc \neq 0$ então $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

1.2 DETERMINANTES

A seguir, serão abordados:

- ✓ definição de determinantes para matrizes de ordem 3;
- ✓ método de cálculo de determinantes para matrizes $n \times n$ (desenvolvimento de Laplace);
- ✓ propriedades de determinantes;
- ✓ cálculo de determinante por escalonamento.

1.2.1 Determinantes de matrizes de ordem 3

A regra de Sarrus é um método para o cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem 3. Seja a matriz

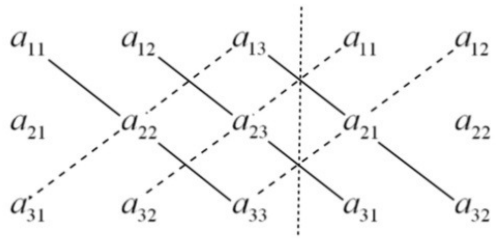
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

O determinante é dado, segundo a regra de Sarrus por

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= [(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32})] - [(a_{13}a_{22}a_{31}) + (a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{23}a_{32})]$$

Uma forma prática de calcular o determinante por esta regra consiste em começar por escrever à direita da matriz as duas primeiras colunas da mesma



Somando-se então os produtos dos elementos das diagonais (em linha contínua) e subtraindo-se os produtos dos elementos das outras diagonais (em linha pontilhada), têm-se o determinante de A.

- **Exercício**: Calcule o determinante da matriz A= $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta: $\det(A) = -27$

1.2.2 Desenvolvimento de Laplace

Definições: Seja **A**=$[\mathrm{a_{ij}}]$ uma matriz de ordem *n,* com $n \geq 2$. Então:

a) c_{ij} é o elemento da matriz dos cofatores de **A**, representado pelo escalar $C_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz **A** retirando a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna.

b) o determinante de A é o escalar

$$detA = a_{11}detD_{11} - a_{12}detD_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}detD_{1n} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}detA_{1j} \quad \text{(I)}$$

- **Exercício**: Verifique que esta definição fornece corretamente a fórmula para o determinante de uma matriz de ordem 2.

1.2.3 Exemplo: Considere a matriz **A**=$[\mathrm{a_{ij}}]$ de ordem 3, o cálculo do determinante, usando os termos da 1ª linha, é dada por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

A definição (I) é frequentemente referida como a expansão de cofatores pela primeira linha. O fato interessante é que podemos obter o mesmo resultado com a *expansão de cofatores por qualquer linha ou mesmo por qualquer coluna*. Este fato dá origem ao **Teorema da Expansão de Laplace**. Para mais detalhes deste teorema veja o livro de Poole (2004), citado como bibliografia.

O termo $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ é igual, a menos do sinal mais ou menos, ao determinante menor complementar correspondente, sendo o sinal correto dado pelo termo $(-1)^{i+j}$. Uma forma rápida para determinar se o sinal é + ou – é lembrar que os sinais compõem um padrão de um “tabuleiro de xadrez”:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

1.2.4 Exemplo: Calcule o determinante da matriz A= $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Observações:

1) O cálculo do determinante de matrizes com ordem maior do que 3 só é possível usando o teorema de Laplace.

2) Para usar o teorema de Laplace, neste exemplo, a melhor escolha é a linha 2, pois é a linha ou coluna que se apresenta maior números de zeros.

Resolução: Escolhendo os termos da segunda linha tem-se:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot C_{21} + 2 \cdot C_{22} + 0 \cdot C_{23} + (-1) \cdot C_{24} = 2 \cdot C_{22} - C_{24}$$

Então, necessitamos calcular os cofatores C_{22} e C_{24}.

$$C_{22} = (-1)^{2+2} D_{22} = D_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = [30+6+60]-[18+40+15] = 96-73 = 23$$

$$C_{24} = (-1)^{2+4} D_{24} = D_{24} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [80+12+5]-[12+10+40] = 97-62 = 35$$

Portanto, $\det(A) = 2 \cdot C_{22} - C_{24}$ = 2·23-35 = 46-35 = 11

◆ **Exercício**: Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ utilizando:

a) expansão de cofatores pela 3ª linha;

b) expansão de cofatores pela 2ª coluna. (Resposta: $\det(A) = 5$)

1.2.5 Teorema: Uma matriz quadrada **A** é inversível se, e somente se, o determinante de **A** for diferente de zero.

1.2.6 Propriedades da matriz inversa

Sejam **A** e **B** matrizes inversíveis de mesma ordem. Então valem as propriedades:

(i) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

(ii) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

(iii) $(\mathbf{A}^{t})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{t}$

A inversa da transposta é a transposta da inversa

1.2.7 Propriedades dos determinantes

i) O determinante de uma matriz A não se altera quando se trocam todas as linhas pelas colunas, na mesma ordem, ou seja, $\det(A) = \det(A^t)$.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

ii) Se na matriz **A,** duas linhas (ou duas colunas) têm seus elementos correspondentes proporcionais, o determinante é nulo (numa matriz **A**, dois elementos são correspondentes quando, situados em linhas diferentes, estão na mesma coluna, ou quando, situados em colunas diferentes, estão na mesma linha).

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ ($L_2=2\ L_1$)

iii) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

iv) $\det(AB) = \det(A) . \det(B)$

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ então: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 24 & 10 \end{bmatrix}$,

$\det(A) = 2,\quad \det(B) = -10$ e $\det(AB) = -20 = \det(A) \,.\, \det(B).$

1.2.8 Método para cálculo de determinante (por escalonamento)

A maneira mais eficiente para calcular determinantes é utilizando escalonamento de linhas. No entanto, nem toda operação elementar com linhas (ou colunas) deixa inalterado o valor do determinante de uma matriz. O próximo teorema resume as principais propriedades que são necessários para usar o escalonamento de linhas (ou colunas) de forma eficaz.

1.2.9 Teorema

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada.

a) Se A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, então $\det A = 0$.

Os seguintes determinantes são nulos: $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -9 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

b) Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) de A, o determinante muda de sinal.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

c) Se A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad (L_1 = L_2)$$

d) Quando se multiplicam por um número real todos os elementos de uma linha (ou coluna) da matriz **A**, o determinante fica multiplicado por esse número:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.2.10 Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Como essas matrizes se diferenciam apenas pela primeira linha, onde os elementos da 1ª linha de B são múltiplos da 1ª linha de A (k=4), então $\det(B) = 4\det(A)$.

e) Se cada elemento de uma linha (ou coluna) de A pode ser escrita como soma de duas parcelas, o determinante de A pode ser expresso sob a forma de uma soma dos determinantes de duas matrizes. Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

f) Um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (ou uma coluna) da matriz A, os elementos correspondentes de outra linha (ou coluna) previamente multiplicados por um número real diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

1.2.11 Exemplo: Calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

No próximo determinante, a nova linha L_2 recebe a linha L_2 mais 3 vezes a linha L_1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ (0 + 3 \cdot 1) & (2 + 3 \cdot 2) & (-3 + 3 \cdot 1) \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 35 - 46 = -11$$

Obtém-se assim o mesmo resultado, conforme o item (f) do teorema.

Observações: Como a forma escalonada de uma matriz quadrada é necessariamente triangular superior e o determinante dessa matriz é o produto dos elementos da diagonal principal, pode-se combinar as propriedades do teorema (itens a até f) para calcular determinantes de maneira eficiente.

Para as operações elementares com as linhas utilizam-se as seguintes notações:

1. Trocar duas linha de posição. Notação: $L_i \leftrightarrow L_j$ (Esta operação muda o sinal do determinante)
2. Multiplicar uma linha por uma constante não nula. Notação: αL_i
3. Somar a uma linha por um múltiplo de uma outra. Notação: $L_i + \alpha L_j$

1.2.12 Exemplo: Calcule o $\det(A)$ utilizando o processo de escalonamento por linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{(L_1 \leftrightarrow L_2)}{=} (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{(\frac{1}{3}L_1)}{=} (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{(L_3 - 2L_1) \\ (L_4 - 5L_1)}}{=} (-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \end{vmatrix} \underset{(L_2 \leftrightarrow L_4)}{=} -(-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 4 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\substack{(L_3 + 4L_2) \\ (L_4 + 2L_2)}}{=} 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 15 & -33 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = 3.1.(-1).15.(-13) = 585$$

Caso queira operar com as colunas, troque L por C nas notações:
(a) troca de duas posições $(C_i \leftrightarrow C_j)$; (b) multiplicação de coluna por uma constante (αC_i); soma de uma coluna por um múltiplo de uma outra $(C_i + \alpha C_j)$.

1.2.13 Teorema: Se A é inversível então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Demonstração: Como A é inversível, $AA^{-1} = I$, logo, $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$. Portanto, $(detA).(\det A^{-1}) = 1$. Já que $\det(A) \neq 0$ então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

1.2.14 Definições: Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ cujo determinante é nulo é uma matriz singular.
Caso o $\det(A) \neq 0$, a matriz A é denominada matriz não singular ou regular.

1.2.15 Exemplo: Como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \det(B) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = -7 \neq 0,$$

então A é uma matriz singular e B é não-singular.

1.2.16 Operações elementares em matrizes

Um processo de inversão de matrizes

O processo prático de inversão de matriz, que será apresentado a seguir, é baseado nas operações com as linhas de uma matriz. A idéia é efetuar operações linha em A e I simultaneamente, isto é, executar operações na matriz $[\,A \mid I\,]$. Caso as operações nas linhas da

matriz $[\,A\,|\,I\,]$ resulte na matriz $[\,I\,|\,A^{-1}\,]$, obtém-se um método para o cálculo da inversa de A, denominado método de eliminação de Gauss-Jordan.

Operações elementares em matrizes

I) Permutação de duas linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$).

II) Multiplicação de todos os elementos de uma linha por um número real diferente de zero (αL_i).

III) Substituição dos elementos de uma linha pelo produto de um número real diferente de zero pelos elementos desta linha somado aos elementos correspondentes de outra linha, previamente multiplicadas por um número real diferentes de zero ($L_i \leftrightarrow \alpha L_i + \beta L_j$).

1.2.17 Equivalência entre matrizes

Dadas as matrizes **A** e **B**, de mesma ordem, diz-se que a matriz **B** é equivalente à matriz **A**, e se representa por **A~B**, se for possível transformar **A** em **B** por meio de uma sucessão finita de operações elementares.

1.2.18 Cálculo da matriz inversa utilizando o método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan para o cálculo da inversa consiste em utilizar operações elementares e a propriedade de matrizes equivalentes para transformar $[\,A\,|\,I_n\,]$ em $[\,I_n\,|\,A^{-1}\,]$.

1.2.19 Exemplo:

Verificar se a matriz A= $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ é singular, caso não seja, determinar a inversa A^{-1} usando operações elementares.

Resolução:

Como $\det(A) = 32 \neq 0$ então a matriz é inversível.

Para determinar a matriz inversa, vamos usar as operações elementares e a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{(L_2 \leftrightarrow L_3)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{(L_1 \leftarrow 4L_1 - L_2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 12 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3)}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \sim \\ (L_1 \leftarrow L_1/8) \\ (L_2 \leftarrow L_2/4) \\ (L_3 \leftarrow -L_3/4) \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/8 & 3/8 & -1/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 0 \end{array}\right]$$

Como foi dito acima, transformamos $[\,A \mid I_n\,]$ em $[\,I_n \mid A^{-1}\,]$.
Portanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 & -1/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.20 Cálculo da matriz inversa utilizando o método da matriz adjunta

Dada uma matriz A, lembre-se que a matriz dos cofatores é $C = [c_{ij}]$ onde $c_{ij} = (-1)^{i+j}D_{ij}$ e D_{ij} é o determinante da matriz A retirando a *i-ésima* linha e a *j-ésima* coluna.

1.2.21 Definição: Dada uma matriz quadrada A, denomina-se matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofatores de A.

Notação: $adj(A) = C^T$

O seguinte teorema fornece mais um método de calcular a inversa de uma matriz.

1.2.22 Teorema: Se a matriz quadrada A admite inversa então $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{\det(A)} C^T$.

Em outras palavras, a inversa A^{-1}, se existe, pode ser calculada pelo inverso do determinante de A vezes a matriz transposta dos cofatores de A.

1.2.23 Exemplo: Calcule a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ utilizando o método da matriz adjunta.

Resolução: A inversa de A existe pois $\det(A) = 2 \neq 0$. Agora calculando a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de A têm-se:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \ adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -11/2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Exercício**: Utilize o método da matriz adjunta para calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Resposta: A matriz dos cofatores é $\begin{bmatrix} -18 & 10 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -6 & -2 \end{bmatrix}$.

1.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

1.3.1 Equações lineares

Uma equação linear em n variáveis $x_1,\ x_2, \dots ,\ x_n$ é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1,\ a_2, \dots ,\ a_n,\ b$ são constantes reais.

Os valores (raízes) das variáveis que verificam a equação constituem o conjunto de soluções.

1.3.2 Sistema de equações lineares (SEL)

Um sistema de equações lineares é um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

sendo a_{ij} e b_i constantes reais.

Na forma matricial tem-se que $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A solução do sistema $(*)$ é o conjunto solução, de modo que

$$S = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

satisfaz $(*)$, se verifica quando $x_j = s_j \ \ \forall\ j$.

Observação: Caso todos os termos independentes sejam nulos $(b_i = 0)$, o sistema $(*)$ é denominado homogêneo. Na forma matricial fica $AX = 0$, em que 0 é a matriz coluna. Todo sistema homogêneo admite a solução $X = 0$, denominada, *solução trivial*, em que $x_i = 0$, ∀ i.

1.3.3 Classificação do SEL

Sistema possível ou **compatível** é o SEL que **admite** solução.

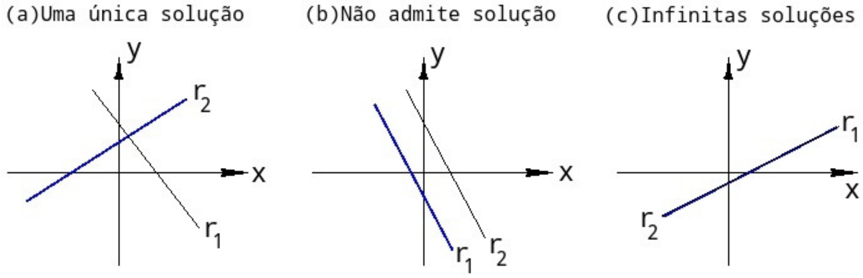
Sistema impossível ou **incompatível** é o SEL que **não admite** solução.

O sistema possível se divide em outras duas classes:

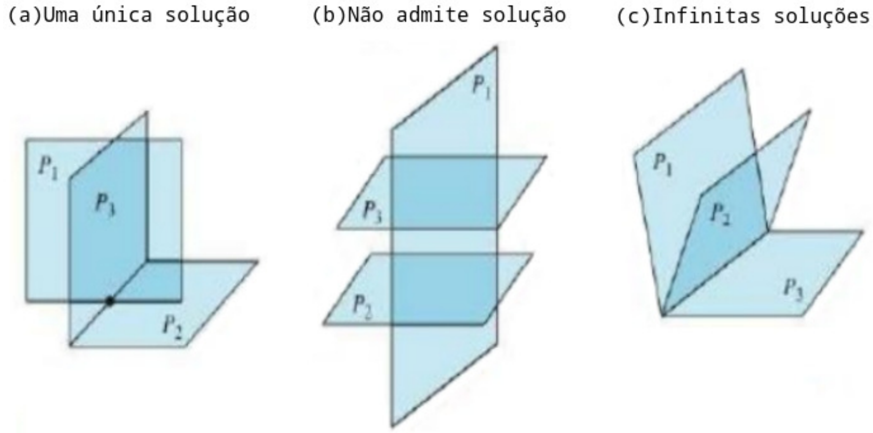
Sistema possível e determinado é o SEL que admite **uma única** solução.

Sistema possível e indeterminado é o SEL que admite **mais de uma** solução (na verdade, admite infinitas soluções).

Seja um sistema de 2 equações com 2 incógnitas pode-se considerar três possibilidades de representação gráfica:



Para um sistema de 3 equações e 3 incógnitas, considere as seguintes representações, entre outras possibilidades (P_1, P_2 e P_3 são planos).



1.3.4 Exemplos:

Resolver e classificar os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 18 & \times(3) \\ 3x + 4y = 25 & \times(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 54 & (Eq.1) \\ -6x - 8y = -50 & (Eq.2) \end{cases} \Rightarrow$ (Eq.1) + (Eq.2) $\Rightarrow$ y=4

Substituindo o y na 1ª equação: 2x+3·4=18 $\Rightarrow$ x=3

Portanto, a solução é $S = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ e a classificação é compatível (ou possível) e determinado (uma única solução)

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 100 & \times(2) \\ 8x + 4y = 200 & \times(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 200 & (Eq.1) \\ -8x - 4y = -200 & (Eq.2) \end{cases} \Rightarrow$ (Eq.1) + (Eq.2) $\Rightarrow$ 0·x=0 ou 0·y=0

As duas equações, na verdade, são iguais. Então a solução é dada apenas por uma, ou seja, 4x+2y=100 $\Rightarrow$ y=50-2x.

Portanto, a solução é dada por $S = \left\{\begin{bmatrix} x \\ 50 - 2x \end{bmatrix}, \forall x \in R\right\}$ e a classificação é compatível(ou possível) e indeterminado(uma infinidade de soluções)

c) $\begin{cases} 3x + 9y = 15 & (Eq.1) \\ 3x + 9y = 12 & (Eq.2) \end{cases} \Rightarrow$ (Eq.1) – (Eq.2) $\Rightarrow$ 0·x+0·y=3 ou 0·x=3 ou 0·y=3

Concluímos que não existe x tal que 0·x=3.

Portanto, a solução é dada por $S = \emptyset$ e a classificação é incompatível (ou impossível)

1.3.5 Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes quando admitem a mesma solução.

As operações elementares efetuadas nas matrizes também podem ser usadas em sistemas de equações lineares. Desta forma, dois sistemas de equações lineares são equivalentes se diferem por uma operação elementar.

1.3.6 Método da matriz inversa

Dado um sistema de equações lineares na forma matricial $AX = B$, onde A é uma matriz inversível. Multiplicando a equação matricial por A^{-1} pela esquerda, temos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad IX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Este método resolve apenas sistemas possíveis e determinados com *n* equações e *n* variáveis. A seguir é apresentado um sistema com 2 equações e 2 variáveis. Posteriormente, será discutido este método com mais detalhes na Regra de Cramer.

1.3.7 Exemplo:

Resolva o sistema $\begin{cases} 2x+4y=22 \\ 5x-15y=-20 \end{cases}$.

Resolução:

Na forma matricial tem-se **AX**=**B**, em que **A**=$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}$, **X**=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e **B**=$\begin{bmatrix} 22 \\ -20 \end{bmatrix}$.

A matriz inversa da matriz **A** é

$$A^{-1}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Portanto: **X**=**A**$^{-1}$·**B**=$\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 22 \\ -20 \end{bmatrix}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 15\cdot 22+4\cdot(-20) \\ 5\cdot 22+(-2)\cdot(-20) \end{bmatrix}=\frac{1}{50}\begin{bmatrix} 250 \\ 150 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Conjunto solução: $S=\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$.

MÉTODOS PARA RESOLVER SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Os métodos para resolver sistemas de equações lineares serem apresentados são:

- ✓ Método de eliminação de Gauss (forma escalonada de AB)
- ✓ Uma variante do método de eliminação gaussiana é o método de eliminação de Gauss-Jordan, gerando uma matriz na forma escalonada reduzida de AB.
- ✓ Regra de Cramer (Se $\det \mathrm{A}_{n\times n} \neq 0$ então a solução é $X=A^{-1}B$)

1.3.8 Método de eliminação de Gauss

Há duas matrizes importantes associadas a um sistema linear: a matriz dos coeficientes e a matriz ampliada, sendo esta composta pela matriz dos coeficientes acrescentada de uma coluna contendo os termos constantes.

Para o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x \quad\; + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

a matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 3 \\ 1 & 0 & 5 & | & 1 \\ -1 & 3 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

O procedimento de resolução de sistema de equações lineares, que será abordado a seguir, é baseado na idéia de reduzir a matriz ampliada do sistema a uma forma que possa ser resolvida por substituição de trás para a frente. O método é direto no sentido de que leva diretamente à solução, se existir, em um número finito de passos.

Quando se consegue um formato de escada nos elementos não nulos da matriz final, a solução é direta.

1.3.9 Exemplo: As seguintes matrizes estão na forma escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

A palavra escalonar vem da palavra latina *scala*, que significa "escada" ou "degraus". Escalonar uma matriz significa dar a ela a forma de escada.

1.3.10 Definição: As seguintes **operações elementares com as linhas** podem ser realizadas em uma matriz:

1. Trocar duas linha de posição. Notação: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicar uma linha por uma constante não nula. Notação: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
3. Substituir uma linha pela soma do múltiplo dessa linha com o múltiplo de outra linha. Notação: $L_i \leftarrow \beta L_i + \alpha L_j$

Quando uma redução por linhas é aplicada à matriz ampliada de uma sistema de equações lineares, cria-se um sistema equivalente que pode ser resolvido por substituição de trás para a frente. O processo inteiro é conhecido como **método de eliminação de Gauss** ou **método de eliminação gaussiana**.

1.3.11 Exemplo: Resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Resolução: A matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & -2 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Reduzindo à forma escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & -2 & | & -5 \end{bmatrix} \underset{\substack{(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & -3 & | & -8 \end{bmatrix} \underset{(L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -5 & | & -10 \end{bmatrix}.$$

O sistema correspondente é

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ -5x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Após a substituição de trás para a frente tem-se a solução

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

1.3.12 Exemplo: Resolver e classifique o sistema $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 5x - 2y = 4 \\ 10x - 4y = 3 \end{cases}$

Resolução: Reduzindo à forma escalonada por linhas a matriz ampliada do sistema tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & | & 16 \\ 5 & -2 & | & 4 \\ 10 & -4 & | & 3 \end{bmatrix} \underset{(L_1 \leftarrow L_1/2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 8 \\ 5 & -2 & | & 4 \\ 10 & -4 & | & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{(L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 10L_1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & -12 & | & -36 \\ 0 & -24 & | & -77 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{\substack{(L_2 \leftarrow -L_2/12) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Como $0x + 0y = -5$, então não existe x e y tais que satisfaça esta equação.

Portanto: $S = \emptyset$ e o sistema é impossível.

1.3.13 Definição: O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.

1.3.14 Teorema (Teorema do posto)

Seja A a matriz dos coeficientes de um sistema de equações lineares com n variáveis. Se o sistema admite solução então o

$$número\ de\ variáveis\ livres = n - posto(A)$$

1.3.15 Exemplos: Sejam as seguintes matrizes ampliadas escritas na forma escalonada por linhas. Identifique qual é o posto da matriz dos coeficientes e o número de variáveis livres.

a) A forma escalonada da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & -2 & | & -5 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 10 \end{bmatrix}$. O posto da matriz dos coeficientes é 3 e o número de variáveis livres é $n - posto = 3 - 3 = 0$.

b) A forma escalonada da matriz $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & | & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & | & -3 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. O posto da matriz dos coeficientes é 2 e o número de variáveis livres é $n - posto = 4 - 2 = 2$.

1.3.16 Método de eliminação de Gauss-Jordan

Uma modificação do método de eliminação de Gauss simplifica bastante a fase de substituição de trás para a frente. Essa variante, conhecida como método de eliminação de Gauss-Jordan, baseia-se em reduzir ainda mais a matriz ampliada.

1.3.17 Definição: A matriz A, do sistema $AX = B$, está na forma escalonada reduzida (por linhas) se ela satisfaz as seguintes propriedades:

a) Todas as linhas nulas da matriz ocorrem abaixo das linhas não nulas.

b) O pivô (primeiro elemento não nulo da linha) de cada linha não nula é 1.

c) O pivô de uma linha sempre está a direita do pivô da linha anterior.

d) Se uma coluna contêm um pivô então todos os outros elementos da coluna são nulos.

Se satisfazer todas essas propriedades então a forma escalonada reduzida da matriz A é única.

As seguintes matrizes estão na forma escalonada reduzida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.18 Exemplo: Resolva o sistema

$$\begin{aligned} w - x - y + 2z &= 1 \\ 2w - 2x - y + 3z &= 3 \\ -w + x - y &= -3 \end{aligned}$$

Resolução: Reduzindo à forma escalonada a matriz ampliada do sistema obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & | & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 + L_1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} \underset{(L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Para escrever na forma escalonada reduzida deve-se criar um 0 acima do pivô 1 da segunda linha e terceira coluna. Faz isso somando a linha 2 à linha 1, obtendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{(L_1 \leftarrow L_1 + L_2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema foi então reduzido a

$$w - x + z = 2$$

$$y - z = 1$$

Agora é bem mais fácil resolver o sistema em função das variáveis dependentes:

$$w = x - z + 2 \quad \text{e} \quad y = 1 + z$$

Se atribui parâmetros $x = s$ e $z = t$, a solução pode ser escrita da forma

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 + s - t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{bmatrix}, \forall s, t \in R \right\}$$

1.3.19 Regra de Cramer

O cálculo da inversa de uma matriz fornece um método de resolução de sistemas lineares de equações. Este só se aplica a sistemas lineares em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Quando o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo, este método é denominado *Regra de Cramer*. Suponhamos que se queira resolver o sistema linear de n equações e n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Pode-se escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad AX = B$$

onde A, B e X, são respectivamente, as matrizes dos coeficientes, dos termos independentes e das incógnitas. Para esta equação suponha que A tenha inversa. Então

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \;\rightarrow\; (A^{-1}A)X = A^{-1}B \;\rightarrow\; IX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Utilizando a matriz adjunta ($adj(A) = C^T$) temos $X = \left(\frac{1}{\det(A)} C^T\right) B$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então

$$x_1 = \frac{b_1 c_{11} + \cdots + b_n c_{n1}}{\det(A)}$$

Note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obteve de A, substituindo a primeira coluna da matriz pelos termos independentes. De fato, utilizando o desenvolvimento de Laplace, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 c_{11} + \cdots + b_n c_{n1}$$

Ou seja

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Fazendo deduções análogas, obtém-se

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

para $i = 1,2, \dots, n$.

1.3.20 Exemplo: Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x + 3z = 5 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$, usando a regra de Cramer.

Resolução:

Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ a matriz dos coeficientes e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ a matriz dos termos independentes.

Então

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 14) - (0 + 12 + 3) = 14 - 15 = -1$$

e portanto a solução é

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{49}{-1} = -49 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-9}{-1} = 9 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-18}{-1} = 18$$

Logo o conjunto solução é $S = \left\{ \begin{bmatrix} -49 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix} \right\}$.

1.3.21 Exemplo:

Efetuando as seguintes operações matriciais sobre a matriz ampliada $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reinterpretando as matrizes acima como sistemas de equações, diremos que o sistema de quatro equações associado à matriz inicial:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x + 0y = 14/9 \\ 0x + y = 1/9 \end{cases}$$

associado à matriz escalonada reduzida. Este é um caso de sistema com equações redundantes já que a terceira e a quarta equações podem ser desprezadas. Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$$

associado à matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Usamos dizer também que, neste caso as duas primeiras equações são "independentes" e que as demais são "dependentes" destas. Segundo esta terminologia, denominamos posto de uma matriz ao número de *linhas "independentes"* desta. Observe que uma linha será "dependente" de outras se ela puder ser escrita como soma de produtos destas outras linhas por constantes. Costumamos dizer também que esta linha é uma combinação linear das outras. Por exemplo, na matriz B podemos dizer que a primeira e a segunda linhas são independentes, enquanto que a terceira e a quarta são combinações lineares das outras primeiras linhas.

◆ **EXERCÍCIOS** (Matrizes, determinantes e sistemas lineares)

1) Represente a matriz $\mathbf{A}_{mxn}$ de acordo com o elemento genérico a_{ij}.

(a) m = 2, n = 4, sabendo que $a_{ij} = 3i + j$.

(b) m = 3, n = 3, sabendo que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, se\ i = j \\ 2ij, se\ i \neq j \end{cases}$

(c) m = 3, n = 3, sabendo que $a_{ij} = \begin{cases} i, se\ i < j \\ ij, se\ i = j \\ i - j, se\ i > j \end{cases}$

2) Se A_{3x2}, com $a_{ij} = \dfrac{2i - j}{2}$, determine as matrizes A e A^t.

3) Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcular a matriz:

(**a**) M, tal que M – 2A + 3B = **0** (matriz nula 3x1). (**b**) N, tal que N = A^t - $2B^t$

(**c**) X que seja solução da equação matricial 2X – A + $\frac{1}{2}$ B = 0.

4) Calcule os valores de m e n para que as matrizes A e B sejam iguais:

a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 15n \\ 12+n & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 8 & 75 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} m^2 - 40 & n^2 + 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 41 & 13 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & m^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 10m - 25 \end{bmatrix}$

7) Determine os valores numéricos de **a** e **b** tais que W = **a**X + **b**Y, usando apenas operações matriciais, onde

(a) W = $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$, **X =** $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, **Y =** $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(b) W =** $[-9 \quad -14]$, **X =** $[1 \quad 2]$, **Y =** $[3 \quad 5]$

8) Determine os valores numéricos de **a, b, c** e **d** tais que W = **a**X + **b**Y + **c**Z + **d**R, usando apenas operações matriciais, onde

W = $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$, **X=** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, **Y=** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, **Z=** $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, **R=** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$,

Resposta: a=2, b=-4, c=1, d=3

9) Sejam **A** = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, **B** = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(a) Calcule ***AB*** e ***BA***. (b) Determine $(AB)^t$, A^tB^t e B^tA^t. Compare os resultados.

Resp.: (a)***AB*** =**0**, ***BA*** = $\begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ (b)$(\boldsymbol{AB})^t = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{B}^t = \begin{bmatrix} -11 & -22 & -11 \\ 6 & 12 & 6 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t = \mathbf{0}$.

10) Sejam B = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Justifique que B é uma matriz não inversível e A é inversível.

(b) Calcule $(AC)^{-1}$, $A^{-1}C^{-1}$ e $C^{-1}A^{-1}$. Compare os resultados.

(c) Determine $(A^t)^{-1}$ e $(A^{-1})^t$

11) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ -5 & -2 & -9\\ 7 & 8 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 1\\ 7 & 2 & -4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2 & 6 & 8\\ 3 & 9 & 12\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$,

Calcular, pelo processo da triangularização (forma escalonada) ou por desenvolvimento de Laplace ou por Sarrus:

a) det A b) det B c) det (2A-3B+4C) d) det (AC^T) e) det (CB)A

12) Calcular o determinante da matriz $H=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1 & -2\\ 4 & -3 & 5 & 1\end{bmatrix}$, usando o processo de escalonamento e por Laplace (desenvolvendo-o pela 2ª linha). R: 2

13) Calcule os determinantes usando expansão de cofatores por linha ou coluna (desenvolvimento de Laplace).

$a)\begin{vmatrix}cos\theta & sen\theta & tg\theta\\ 0 & cos\theta & -sen\theta\\ 0 & sen\theta & cos\theta\end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix}a & b & 0\\ 0 & a & b\\ a & 0 & b\end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 2 & 1\end{vmatrix}$ $d)\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & b & c\\ 0 & d & e & f\\ g & h & i & j\end{vmatrix}$

14) Determinar, se existir, a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -5 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ $E=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 7\\ 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$ $F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 0\\ 9 & 0 & 0\end{pmatrix}$

15) Resolver e classificar os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases}5x + 8y = 34\\ 10x + 16y = 50\end{cases}$ R: Sistema Incompatível: $S = \emptyset$

b) $\begin{cases}4x - y - 3z = 15\\ 3x - 2y + 5z = -7\\ 2x + 3y + 4z = 7\end{cases}$ R: S.L.C.D: $S = \{(3,3,-2)\}$

c) $\begin{cases}2x + 3y - 2z = 2\\ 3x - 5y + 4z = 5\\ x - 2y - 7z = -24\end{cases}$ R: S.L.C.D. $S = \{(1,2,3)\}$

d) $\begin{cases}x + 4y + 6z = 0\\ -\frac{3}{2}x - 6y - 9z = 0\end{cases}$ R: S.L.C.I. $S = \{(-4y-6z, y, z) / \forall\, y,z \in \mathbb{R}\}$

e) $\begin{cases}4x - 3y = -18\\ 2y + 5z = -8\\ x - 2y - 3z = 0\end{cases}$ R: S.L.C.D. $S = \{(0,6,-4)\}$

f) $\begin{cases} x + 4y + 6z = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$ R: S.L.C.I. $S = \left\{\left(\frac{3+2z}{5}, \frac{13-8z}{5}, z\right) \ / \ \forall z \in \mathbb{R}\right\}$

g) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$ R: S.L.C.I. $S = \{(3-2z, 3-2z, z) / \ \forall \ z \in \mathbb{R}\}$

h) $\begin{cases} 7x - 2y + 4z = -15 \\ 9x + 3y - 3z = 0 \\ x - 4y - z = -8 \end{cases}$ R: S.L.C.D. $S = \{(-1,2,-1)\}$

16) Estabelecer a condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes para que os seguintes sistemas sejam compatíveis:

a) $\begin{cases} 4x + 12y + 8z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ -4y - 4z = c \end{cases}$

R: 2a – 4b + c = 0

b) $\begin{cases} x + y - z = a \\ -x + 2z = b \\ y + z = c \end{cases}$

R: a + b –c = 0

2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 Definição

Seja V um conjunto não vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é,

$\forall$ **u, v** $\in$ V temos: **u+v** $\in$ V e,
$\forall$ **u** $\in$ V e $\alpha \in \mathbb{R}$ (conj. dos num. reais), temos: α **u** $\in$ V

V com essas operações é chamado **espaço vetorial real** se forem verificados 8 axiomas:

Em relação à adição: Sejam os vetores **u, v, w** $\in$ V

(***A***$_1$) **(u + v) + w = u + (v + w)**

(***A***$_2$) **u** + **v** = **v** + **u**

(***A***$_3$) Existe um único elemento neutro neutro **0**$\in$ V tal que **u + 0 = 0 + u = u**

(***A***$_4$) Existe um único elemento simétrico -**u** $\in$ V tal que **u +** (-**u**) **= 0**

Em relação à multiplicação: Sejam os vetores **u,v** $\in$ V e os escalares α , $\beta \in \Re$

(***M***$_1$) (α . β)**u** = α (β **u**)

(***M***$_2$) ($\alpha + \beta$)**u** = α **u** + β **u**

(***M***$_3$) α (**u + v**) = α **u** + α **v**

(***M***$_4$) **1u = u**

Observação: Os elementos de um espaço vetorial V podem ser polinômios, matrizes, números, funções, desde que as operações definidas neste conjunto satisfaçam os *oito Axiomas*. Mas independente de sua natureza os elementos de um Espaço Vetorial V serão chamados ***vetores.***

2.1.1 Exemplos:

1) **V** = conjunto das matrizes 2x2 ou V = **M(2x2)** = $\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \Re \right\}$.

Em V é definido as operações:

Sejam **u,v** $\in$ **V** onde **u** = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{a_4} \end{bmatrix}$, **v** = $\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{b_4} \end{bmatrix}$, e $\alpha \in \Re$

Operações: **u+v** = $\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}$ e α **u** = $\begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{bmatrix}$

Observação: Essas são as ***operações usuais*** de adição e multiplicação por escalar no conjunto das matrizes 2x2.

Para essas operações assim definidas, podem ser verificadas facilmente que valem os 8 axiomas. Portanto, neste exemplo, **V = M(2x2)** é um espaço vetorial.

2) **V =** $\{[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\ /\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}\}$ = conj. das matrizes linha M(1x3)

Operações definidas:

$[a_1\ \ a_2\ \ a_3] + [b_1\ \ b_2\ \ b_3] = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$ (*Cuidado, **adição não usual***)

$\alpha \cdot [a_1\ \ a_2\ \ a_3] = [\alpha \cdot a_1\ \ \ \alpha \cdot a_2\ \ \ \alpha \cdot a_3]$ (*Multiplicação usual*)

Com estas operações, *V é um espaço vetorial* ?

Verificando os axiomas:

Sejam **u =** $[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$**,** **v =** $[b_1\ \ b_2\ \ b_3]$**,** **w =** $[c_1\ \ c_2\ \ c_3]$

A$_1$) (u + v) + w = u + (v + w) **?**

(u + v) + w = $([a_1\ \ a_2\ \ a_3] + [b_1\ \ b_2\ \ b_3]) + [c_1\ \ c_2\ \ c_3]$=
= $[a_1\ \ a_2\ \ a_3] + [c_1\ \ c_2\ \ c_3]$=
= $[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$

u + (v + w) = $[a_1\ \ a_2\ \ a_3] + ([b_1\ \ b_2\ \ b_3] + [c_1\ \ c_2\ \ c_3])$ =
= $[a_1\ \ a_2\ \ a_3] + [b_1\ \ b_2\ \ b_3]$
= $[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$

O Axioma A$_1$ é satisfeito.

A$_2$) u + v = v + u **?**

u + v = $[a_1\ \ a_2\ \ a_3] + [b_1\ \ b_2\ \ b_3] = [a_1\ \ a_2\ \ a_3]$

v + u = $[b_1\ \ b_2\ \ b_3] + [a_1\ \ a_2\ \ a_3] = [b_1\ \ b_2\ \ b_3]$, portanto u+v $\neq$ v+u.

Como o axioma A$_2$ falha, V **não é** um espaço vetorial.

Atenção !!! Basta que um dos axiomas falhe, para que o conjunto (com as oper. definidas) não seja um espaço vetorial.

3) V ={(x,y)∈ $\Re^2$}, conjunto dos vetores em $\Re^2$.

Operações definidas, (a, b) + (c, d) = (a +c, b + d) e α(a,b)= (α^2a, α^2b)

Como a adição é uma operação usual, vamos verificar se falha algum axioma em relação à multiplicação por escalar.

Sejam u = (a, b) e v = (c, d) em $\Re^2$, α e β números reais.

M$_1$) ($\alpha\,.\,\beta$)u = α(β u) **?**

($\alpha\,.\,\beta$)u = ($\alpha\,.\,\beta$)(a, b) = ($\alpha^2\beta^2$ a, $\alpha^2\beta^2$ b)

α(β u) = α**(**β (a,b)**)** = α**(**β^2 a**,** β^2 b**)** = ($\alpha^2\beta^2$ a, $\alpha^2\beta^2$ b), logo ($\alpha\,.\,\beta$)u = α(β u).

O Axioma M$_1$ é satisfeito.

M$_2$) ($\alpha + \beta$)u = αu + βu **?**

($\alpha + \beta$)u = ($\alpha + \beta$)(a,b) = (($\alpha + \beta$)^2**.a,** ($\alpha + \beta$)^2**.b**)

αu + β u = α(a,b) + β (a,b) = (α^2 a, α^2 b) + (β^2 a, β^2 b) =

=($(\alpha^2+\beta^2)$**a,** $(\alpha^2+\beta^2)$**b)**
O Axioma M_2 não é satisfeito, pois $(\alpha+\beta)$u $\neq \alpha$u $+ \beta$ u. ($(\alpha+\beta)^2 \neq \alpha^2+\beta^2$)
Então, **V ={(x,y)∈** $\Re^2$**}** com as operações definidas, **não é** um espaço vetorial.

4) **V** = **M(m,n)** = conjunto das matrizes do tipo mxn, com as operações usuais (de adição e de multiplicação por escalar) definem um espaço vetorial.

Obs: Se A $\in$ M(m,n), então A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

5) V = $\Re^n$ = {(x_1, x_2, x_3, ... , x_n): $x_i \in \Re$}, $1 \le i \le n$

com as operações de adição e de multiplicação por escalar usuais definem um espaço vetorial.

6) V = $\boldsymbol{P_3}$ = conjunto dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3 (incluindo os polinômios de grau zero)

ou P_3 = { $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$: $a_i \in \Re$ }

Exemplos de elementos de P_3: $3,\ 6+5x,\ 6x^2,\ 1+4x^3,\ -3+5x-4x^2+7x^3$

Se $p_1(x)$ e $p_2(x)$ pertencem a P_3, então:

$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ e $p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$

Operações usuais em P_3:

$p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3$

Se $\alpha \in \Re$ temos $\alpha . p_1(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \alpha a_3x^3$
Com estas operações pode-se verificar que V = P_3 é um espaço vetorial.

Observações: Matrizes, vetores, polinômios podem estar associados da seguinte maneira.

Por exemplo,

A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$**,** **v = (a, b, c, d, e, f),** **p(x) = a + bx +** $\mathbf{cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5}$

A $\in$ **M(2,3),** **v** $\in$ $\Re^6$ **,** **p(x)**$\in$ $\boldsymbol{P_5}$

Pode-se dizer que **a, b, c, d, e, f** são as coordenadas de **A, v** e **p(x)**. Por isto, matrizes, vetores, polinômios são chamados de maneira geral ***vetores***.

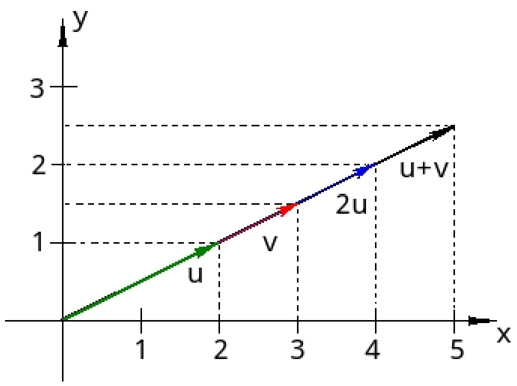
2.2 Subespaços Vetoriais

Deseja-se dentro de um espaço vetorial V, detectar se um subconjunto S de V é também espaço vetorial. Tais conjuntos serão chamados subespaços de V.

2.2.1 Exemplo:

V = $\Re^2$ com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar é um espaço vetorial.

S é uma reta que passa pela origem. Neste caso, S é um subconjunto de V.



$\mathbf{S} \subset \mathbf{V} = \Re^2$

$\mathbf{S} = \left\{(x,y) : y = \frac{1}{2}x\right\} = \left\{(x, \frac{x}{2}); x \in \Re\right\}$

Observa-se que ao somarmos dois vetores de S, obtemos outro vetor em S. E se multiplicarmos um vetor de S por um número, o vetor resultante estará em S.

Sejam os vetores u = (2,1), v = (3, 3/2) $\in$ S, então u + v = (5, 5/2)$\in$S

Seja o vetor u = (2,1) $\in$ S e o escalar $\alpha = 2 \in \mathbb{R}$, então $\alpha\, u = 2\,(2{,}1) = (4{,}2) \in S$.

2.2.2 Definição: Seja V um espaço vetorial e S um subconjunto não vazio de V.

S é um subespaço vetorial de V se:

(i) $\mathbf{0} \in$ S

(ii) $\forall$ **u, v** $\in$ S $\Rightarrow$ **u** + **v** $\in$ S

(iii) $\forall\ \alpha \in \Re$ e $\forall$ **u** $\in$ S $\Rightarrow$ α**u** $\in$ S

OBSERVAÇÕES:

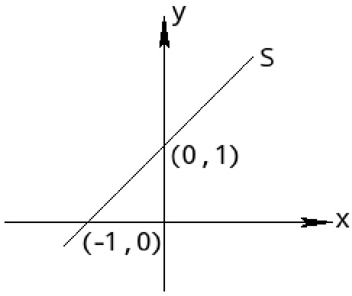
- Qualquer subespaço S de V deve conter o vetor nulo 0 (devido ao Axioma A_3 do Espaço Vetorial). Caso contrário S não é um subespaço vetorial.
- Todo espaço vetorial V admite pelo menos 2 subespaços (chamados subespaços triviais), o conjunto $\{0\}$ e o próprio espaço vetorial V.

2.2.3 Exemplos:

1) Seja V = $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais e $S = \{(t, t+1)\ /\ t \in \mathbb{R}\}$.

S pode ser representada por uma reta que passa pelos pontos (-1,0) e (0,1).

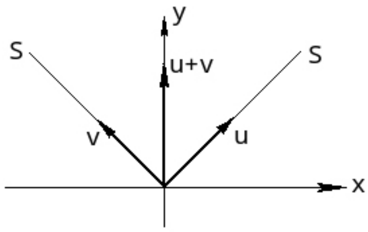
O vetor nulo (0,0) $\notin$ S, então S não é um subespaço vetorial de V.



2) Seja V = $\mathbb{R}^2$ com as operações usuais e $S = \{(x, |x|) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. S é subespaço de V?

i) O vetor nulo $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, portanto a condição "i" é verificada.
ii) Porém, existem vetores u e v de S tais que (u + v) $\notin$ S.

Por exemplo, u = (1,1), v = (-1,1) pertencem a S e u + v = (0,2) $\notin$ S.
Portanto, S não um subespaço de V =$\mathbb{R}^2$.



3) Considere $V = \mathbb{R}^2$ espaço vetorial com as operações usuais.

O subconjunto $C = \{(x, mx); x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{R}^* \}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$? Verifique!

4) Seja o espaço vetorial V = $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais e seja o subconjunto $S = \{(x, y, z) / \ ax + by + cz = 0 \}$. S é um subespaço de V ?

Observação: S é um plano que passa pela origem.

Resolução:
Vamos verificar se em S satisfazem as condições (i), (ii) e (iii).

(i) (0,0,0) $\in$ S, pois a0 + b0 + c0 = 0.
(ii) Sejam u = (u_1, u_2, u_3) e v = (v_1, v_2, v_3) elementos de S.

Então, $\begin{cases} au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \\ av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \end{cases}$

Logo, $a(u_1 + v_1)+b(u_2 + v_2)+c(u_3 + v_3) = 0$

Portanto, $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in$ S. Daí, u +v $\in$ S.

(iii) Seja $\alpha \in \Re$ e u = (u_1, u_2, u_3) $\in \mathbb{R}^3$.
Se u $\in$ S, então $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$.
Portanto,
$\alpha(au_1 + bu_2 + cu_3) = 0 \Rightarrow \alpha a u_1 + \alpha b u_2 + \alpha c u_3 = 0 \Rightarrow a\alpha u_1 + b\alpha u_2 + c\alpha u_3 = 0 \Rightarrow$
$a(\alpha u_1) + b(\alpha u_2) + c(\alpha u_3) = 0 \Rightarrow \alpha u \in$ S.

Como as três condições foram satisfeitas, S é um subespaço de V = $\mathbb{R}^3$.

2.3 Intersecção e Soma de Subespaços

2.3.1 Teorema:

Sejam S_1 e S_2 subespaços vetorias de V (espaço vetorial). Então,

(i) $S_1 \cap S_2$ é um subespaço de V.

(ii) $S_1 + S_2$ é um subespaço de V.

Observação:

$S_1 \cap S_2 = \{v \in V : \mathbf{v} \in S_1 \text{ e } \mathbf{v} \in S_2\}$

$S_1 + S_2 = \{\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \,/\, \mathbf{u} \in S_1 \text{ e } \mathbf{w} \in S_2\}$.

Todo elemento de $S_1 + S_2$ é um vetor soma de 2 vetores, um vetor de S_1 e o outro de S_2.

2.3.2 Exemplos:

a) V = M(3 x 3)

$$S_1 = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 & a_6 \\ 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix}\right\};\ a_i \in \Re \quad \text{e} \quad S_2 = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\right\};\ a_i \in \Re$$

S_1 e S_2 são subespaços de V = M(3 x 3)

S_1 = {matrizes triangulares superiores}, S_2 = {matrizes triangulares inferiores}

Logo, $S_1 \cap S_2 = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix}\right\}$ é um subespaço de V = M(3 x 3)

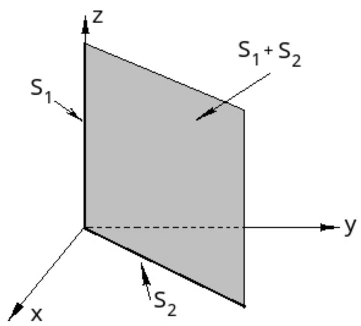
b) $V = \Re^3$

$S_1 = \{(0, 0, x): x \in \Re\}$ Reta no eixo z

$S_2 = \{(a, a, 0): a \in \Re\}$ Reta no plano xy

$S_1 + S_2 = \{(a,a,x)\}$ plano que contém as retas S_1 e S_2.

$S_1 + S_2$ é um subespaço de $V = \Re^3$.



2.4 Soma direta de subespaços

2.4.1 Definição:

Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V.

V é a ***soma direta*** de S_1 e S_2 (Representado por $V = S_1 \oplus S_2$)

Se $V = S_1 + S_2$ e $S_1 \cap S_2 = \{ \mathbf{0} \}$.

2.4.2 Exemplo: V = M(2 x 2)

$\mathbf{S_1} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\mathbf{S_2} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$ onde a, b, c, d $\in \Re$.

$S_1 + S_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$ = M(2 x 2) e $S_1 \cap S_2 = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Logo, $V = S_1 \oplus S_2$ e portanto V é soma direta de S_1 e S_2.

2.5 Combinação linear de vetores

2.5.1 Definição:

Seja V um espaço vetorial tal que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Então, o vetor $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ e $\mathbf{v} \in V$.

2.5.2 Exemplos:

1) Considerando os vetores $\mathbf{v_1}$**=(1,0,0)** e $\mathbf{v_2}$**=(0,1,0).** Escrever **v=(2,3,0)** como combinação linear de $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

Resolução:

$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{(2,3,0)} = a_1\mathbf{(1,0,0)} + a_2\mathbf{(0,1,0)} = (a_1, a_2, 0)$

Daí, $\mathbf{(2,3,0)} = (a_1, a_2, 0) \Rightarrow a_1 = 2,\ a_2 = 3$

Resp: $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$

2) Considerando, novamente, os vetores $\mathbf{v_1}$**=(1,0,0)** e $\mathbf{v_2}$**=(0,1,0).** Mostrar que **w = (1,2,3) não** é uma combinação linear de v_1 e v_2.

Resolução:

$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{(1,2,3)} = a_1\mathbf{(1,0,0)} + a_2\mathbf{(0,1,0)} = (a_1, a_2, 0)$

Logo, $\mathbf{(1,2,3)} = (a_1, a_2, 0)$. Absurdo! Pois $3 \neq 0$.

Portanto, **w** não é uma combinação linear de $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$.

Observação: Nestes exemplos, observe que se α é um plano paralelo aos vetores v_1 e v_2 então v é paralelo ao plano α mas w não é.

2.6 Subespaço finitamente gerado

2.6.1 Definição: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ (espaço vetorial). O conjunto de todos os vetores que são combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ é um ***subespaço vetorial de V***. Este conjunto é representado por

$$S = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n] = \{\mathbf{v} \in V \,/\, \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n\}$$

S é denominado subespaço gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Observação: Seja $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o conjunto gerador de S.

G(A) é o subespaço gerado por A, isto é, $G(A) = [v_1, v_2, \ldots, v_n] = S$

2.6.2 Exemplos

1) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $u = (3,4,5) \in \mathbb{R}^3$.
Determine o subespaço gerado por u, isto é, encontrar $S = [u]$.

Resolução:
$S = [(3,4,5)] = \{(3x, 4x, 5x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$. (Conjunto de todos os vetores paralelos a $(3,4,5)$)

Observação: Se u é um vetor não-nulo pertencente a $\mathbb{R}^3$, então S = [u] é um conjunto de vetores paralelos ao vetor u.

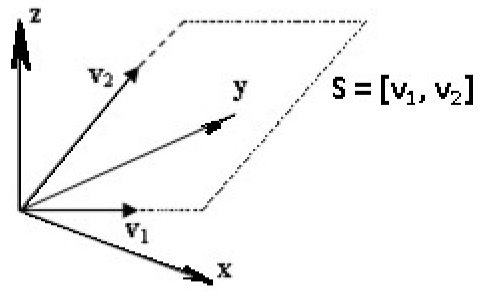
2) Seja $V = \mathbb{R}^3$, encontre $S = [v_1, v_2]$, em que $v_1 = (2,0,1)$ e $v_2 = (0,3,3)$.

Resolução:
$[v_1, v_2] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = a_1(2,0,1) + a_2(0,3,3)\}$. Logo temos,
$(x,y,z) = (2a_1, 0, a_1) + (0, 3a_2, 3a_2) = (2a_1, 3a_2, a_1 + 3a_2)$

Portanto, $2a_1 = x$, $3a_2 = y$ e $a_1 + 3a_2 = z$
$(x,y,z) \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] \Leftrightarrow$ o sistema anterior tem solução.

Substituindo $\mathbf{a_1} = x/2$ e $\mathbf{a_2} = y/3$ na 3ª equação $a_1 + 3a_2 = z$ obtém-se,

$\dfrac{x}{2} + 3\dfrac{y}{3} = z \Rightarrow x + 2y = 2z$ ou $x + 2y - 2z = 0$ (plano que contém v_1 e v_2 e passa na origem)



Portanto, **(x,y,z)** pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, se e somente se, (x,y,z) satisfaz a equação $\mathbf{x + 2y - 2z = 0}$.

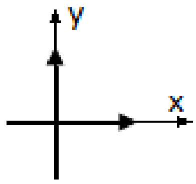
Portando, $[v_1, v_2] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y - 2z = 0\}$ (Conjunto de vetores pertencentes ao plano que contém v_1 e v_2)

3) Seja V = $\mathbb{R}^2$, determine S = $[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$, em que $\mathbf{u_1} = (1,0)$, $\mathbf{u_2} = (0,1)$.

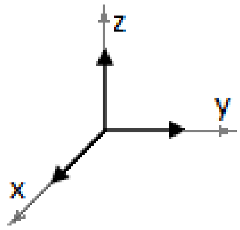
Resolução:
$[u_1, u_2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) = a_1(1,0) + a_2(0,1)\}$.

$(x,y) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (a_1,a_2)$, ou seja, *qualquer vetor* (x,y) pode ser escrito como combinação linear de (1,0) e (0,1), bastando que $a_1 = x$ e $a_2 = y$, ou seja, não têm restrições.

Portanto, $[u_1, u_2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$



Ex. 3



Ex. 4

4) Seja V = $\mathbb{R}^3$, encontrar S = $[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}]$, em que $\mathbf{v_1} = (1,0,0)$, $\mathbf{v_2} = (0,1,0)$, $\mathbf{v_3} = (0,0,1)$.

Resolução:
$[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0, 0,1)\}$. Logo temos,
$(x,y,z) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$

Então, ***qualquer vetor*** (x,y,z) pode ser escrito como combinação linear de (1,0,0), (0,1,0), (0, 0,1), já que $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$.

Portanto, $[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$

Observação:
Nos gráficos dos exemplos 3 e 4, os vetores de $\mathbb{R}^2$ são não paralelos e os vetores de $\mathbb{R}^3$ são não coplanares.

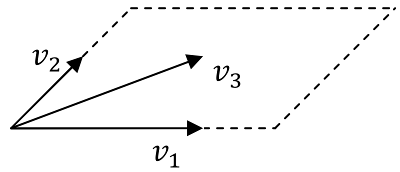
Conclusões:
Dos exemplos 3 e 4, podemos obter algumas generalizações:
Sejam $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \in \mathbb{R}^2$ (Plano) e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \mathbb{R}^3$ (Espaço) (todos não nulos)

(i) Se $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}$ **não** são paralelos, então $[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}] = \mathbb{R}^2$
(ii) Se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ **não** são paralelos a um mesmo plano, então $[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}] = \mathbb{R}^3$

2.7 Dependência e Independência Linear

Seja v_3 um vetor pertencente ao mesmo subespaço gerado por v_1 e v_2, então o subespaço gerado por v_1 e v_2 é o mesmo subespaço gerado por v_1, v_2 e v_3, isto é,

$S = [v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$



A razão disso é que v_3 é um vetor a mais para descrever o subespaço, pois v_3 é uma combinação linear de v_1 e v_2. Em nosso estudo, estamos interessados em determinar dentre um conjunto de n vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, o "menor" conjunto gerador de um subespaço, denominado Base. Para isto precisamos definir dependência e independência linear.

2.7.1 Definição

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ (espaço vetorial).

O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é ***linearmente independente*** (**LI**), se a equação

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

admitir ***apenas*** a solução trivial ($a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$)

Caso exista ***algum*** $a_i \neq 0$, então o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é dito ***linearmente dependente*** **(LD).**

2.7.2 Exemplos:

1) Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $v_1, v_2 \in V$ tal que $\mathbf{v_1 = (1,0)}$ e $\mathbf{v_2 = (0,1)}$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI ou LD ?
Resolução:
Este conjunto é LI pois da equação $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = (0,0)$ temos,
$a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = 0.$

2) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $\mathbf{v_1 = (1,1,2)}$, $\mathbf{v_2 = (3,-8,-5)}$ e $\mathbf{v_3 = (-2,8,6)}$.
O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI ou LD ?

Resolução:
Da equação $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = (0,0,0)$ temos,

$a_1(\mathbf{1,1,2}) + a_2(\mathbf{3,-8,-5}) + a_3(\mathbf{-2,8,6}) = (0,0,0)$

Daí, tem-se o seguinte sistema homogêneo,

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_1 - 8a_2 + 8a_3 = 0 \\ 2a_1 - 5a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases}$$

Sabe-se que todo sistema homogêneo admite a solução trivial. Portanto, verificaremos se o sistema admite outra solução, caso exista, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Escrevendo o sistema na forma de uma matriz ampliada e em seguida utilizando o processo de escalonamento, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -8 & 8 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \underset{\substack{(L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & -11 & 10 \end{bmatrix} \underset{(L_3 \leftarrow L_3 - L_2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $-11a_2 + 10a_3 = 0$ e $a_1 + 3a_2 - 2a_3 = 0$ (Sist. Indeterminado)

Então, $a_2 = \frac{10}{11}a_3$

e $a_1 = -3a_2 + 2a_3 = \frac{-30}{11}a_3 + 2a_3 = \frac{-8}{11}a_3 \Rightarrow a_1 = \frac{-8}{11}a_3$

Logo, para qualquer $a_3 \neq 0$, temos uma solução não trivial.

Por exemplo, se $a_3 = 11$, temos $a_2 = 10$ e $a_1 = -8$, ou seja, $-8(\mathbf{1,1,2}) + 10(\mathbf{3,-8,-5}) + 11(\mathbf{-2,8,6}) = (0,0,0)$.

Então, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é **LD**.

Observação: Para escalonar sistemas homogêneos não há necessidade de incluir a coluna das constantes formada por zeros.

2.7.3 Teorema: O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD $\Leftrightarrow$ Um dos vetores v_i (i=1,2,...,n) for combinação linear dos demais.

2.7.4 Exemplos:

1) No conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$, em que $v_1 = (2,1,3)$, $v_2 = (10,5,15)$, $v_3 = (4,5,9)$, nota-se que:

$\mathbf{v_2} = 5\mathbf{v_1} + 0\mathbf{v_3}$, isto é, v_2 é uma combinação linear de v_1 e v_3.

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

2) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$, em que $v_1 = (2,4,5)$, $v_2 = (8,1,12)$. $v_3 = (10,5,17)$

Observe que: $v_3 = v_1 + v_2$. Então o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD.

Observação: Uma outra versão do teorema é:

O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI $\Leftrightarrow$ Nenhum destes vetores for combinação linear dos demais.

2.7.5 Teorema: Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vetores (linha) em R^n e $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$ que tem esses vetores como suas linhas. Então, $v_1, v_2, \ldots, v_m$ serão linearmente dependentes se, e somente se, $posto(A) < m$, onde m é o número de linhas de A.

2.7.6 Exemplo: Considere os vetores $v_1 = (1, 2, 0),\ \ v_2 = (1, 1, -1)\ \ e\ \ v_3 = (1, 4, 2)$ do R^3.

Construindo uma matriz tendo os vetores dados como suas linhas e escalonando-a temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $posto(A) = 2 < 3\ (número\ de\ linhas\ de\ A)$. Logo, pelo teorema 2.7.5, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente.

Observações:

a) As linhas de uma matriz serão linearmente dependentes (LD) se operações elementares com linhas puderem ser usadas para criar uma linha nula;

b) Uma outra versão do teorema é:

$\{v_1,\ v_2, \dots ,\ v_m\}$ é LI se, e somente se, $posto(A) = m$, onde m é o número de linhas de A.

2.7.7 Exemplo: Sejam os vetores $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculando-se o posto da matriz $A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ temos:

$$A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \sim \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pela forma escalonada de A nota-se que $posto(A) = 3 = número\ de\ linhas\ de\ A$. Portanto, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente.

2.8 Base de um Espaço Vetorial

Pergunta-se: "Quantos vetores têm o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$**?**"

Uma infinidade. Imagina se temos que efetuar operações ou verificar propriedades desse espaço vetorial, tendo que trabalhar com um número infinito de vetores?

Agora, por outro lado, como n vetores linearmente independentes geram o espaço $\mathbb{R}^n$, então basta termos n vetores LI que geram o $\mathbb{R}^n$ para podermos, simplesmente, trabalhar com esses $n$vetores na qual representam todos os vetores do $\mathbb{R}^n$**.**

Portanto, desejamos encontrar um número finito de vetores de um espaço vetorial V que sejam necessários para gerar V. Um conjunto deste tipo denomina-se **Base de V**.

2.8.1 Definição

Seja o conjunto **B** = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset$ V (espaço vetorial).

B é uma base de V se:

(i) o conjunto **B** é LI;

(ii) o conjunto **B** gera V, isto é, $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$

2.8.2 Exemplos:

a) O conjunto **B** = {(1,1), (0,1)} é base de V = $\mathbb{R}^2$?

Basta verificar se **B** é LI e se **B** gera $\mathbb{R}^2$.

(i) a_1**(1,1)** + a_2**(0,1)=(0,0)** $\Rightarrow$ $a_1 = 0$ e $a_1 + a_2 = 0$ $\Rightarrow$ $a_1 = a_2 = 0$.

Logo, B é LI.

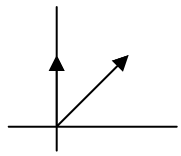
(ii) B gera $\mathbb{R}^2$ se para qualquer v=(x,y)$\in \mathbb{R}^2$ puder ser escrito como combinação linear de (1,1) e (0,1).

De **(x,y) =** a_1**(1,1)** + a_2**(0,1)** temos, $a_1 = x$ e $a_1 + a_2 = y$

Daí, $a_2 = y - a_1 = y - x$.

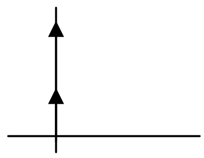
Portanto, **(x,y) =** x**(1,1)** + (y-x)**(0,1)**. Então, B gera $\mathbb{R}^2$.

Como foram satisfeitas as condições (i) e (ii), o conjunto B é uma base de $\mathbb{R}^2$.



Ex 1

b) Seja F = {(0,1), (0,2)} **não é base** de $\mathbb{R}^2$ pois F é um conj. **LD**, já que (0,2) = 2(0,1), ou seja, (0,2) é uma combinação linear de (0,1).



Ex 2

c) Seja V = $\mathbb{R}^2$ e $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$.

O conjunto $\{e_1, e_2\}$ é denominado ***base canônica*** de $\mathbb{R}^2$.

d) Seja V = $\mathbb{R}^3$ e $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$.

O conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é denominado ***base canônica*** de $\mathbb{R}^3$.

e) Os vetores canônicos unitários $e_1, e_2, \ldots, e_n$ em $\mathbb{R}^n$ são LI e geram $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é denominado ***base canônica*** de $\mathbb{R}^n$.

2.8.3 Teorema: Qualquer base de um espaço vetorial V ***tem sempre o mesmo número de elementos***.

Este número é denominado dimensão de V, cuja notação é ***dim V***.

2.8.4 Exemplos

a) Seja o espaço vetorial V = $\mathbb{R}^2$. Os conjuntos **B$_1$** = {(1,0), (0,1)} e **B$_2$** = {(1,1), (0,1)} são bases de V = $\mathbb{R}^2$, então **dim** $\mathbb{R}^2$ = 2.

b) Seja V = $\mathbb{R}^3$ (espaço vetorial), então **dim** $\mathbb{R}^3$ = 3.

c) V = $\mathbb{R}^n$ (espaço vetorial), então **dim** $\mathbb{R}^n$ = n.

d) Seja V = M(2,2) (espaço vetorial), então **dim** M(2,2) = 4.

O conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ forma uma base (base canônica) de M(2,2).

e) Se $V = M(m,n)$ é um espaço vetorial então $\dim\big(M(m,n)\big) = m.n$.

2.8.5 Corolário (Conseqüência do Teorema)

Se ***dim*** V = ***n*** então:

(**a**) qualquer conjunto com mais de **n** vetores é LD.

(**b**) qualquer conjunto de n vetores LI é uma base de V.

2.8.6 Exemplos:

1) Seja o conjunto C = {(1,0,0), (0,1,0), (3,4,7),(5,8,6)}.

Como dim $\mathbb{R}^3$= 3 e o conjunto possui 4 vetores, então o conjunto C é LD. (Pelo corolário 2.8.5(a)).

2) Seja D = {(1,2,3), (-1,1,-1), (2,-1,4)}, então o conjunto D é base de $\mathbb{R}^3$?

Como dim $\mathbb{R}^3$= 3 e D possui 3 vetores. Então, se o conjunto D for LI, pelo corolário 2.8.5(b), D será uma base de $\mathbb{R}^3$. Agora, vamos verificar se D é LI.

De x(1,2,3) + y(-1,1,-1) + z(2,-1,4) = (0,0,0) temos,

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema por escalonamento temos, x = y = z = 0 (única solução).

Portanto, o conjunto D é LI e forma uma base de $\mathbb{R}^3$.

3) Determinar a dimensão e uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais:

(a) V = $\mathbb{R}^3$, A = {(x,y,z)/ z = 4x}

Resolução:

A = {(x,y, 4x)}. Nota-se que existem 2 variáveis livres x e y, portanto dim(A) = 2. Para encontrar uma base, faça x = 1 e y = 0, e posteriormente x = 0 e y =1. Daí, uma base pode ser {(1,0,4), (0,1,0)}.

(b) V = $\mathbb{R}^3$,   B = {(x,y,z)/ x = 5y e z = y}

Resolução:

B = {(5y ,y,y)}, dim B = 1 e uma base de B é {(5,1,1)}.

(c) V = $\mathbb{R}^3$,   C = {(x,y,z)/ y = 2x, z = -y}

Resolução:

C = {(x,2x,-2x)}, dim C = 1 e uma base de C é {(1,2,-2)}

(d) V = $\mathbb{R}^3$,   D = {(x,y,z)/ x +y –z = 0}

Resolução:

D = {(x, y, x+y)}, dim D = 2 e uma base de D é {(1, 0, 1), (0, 1, 1)}

(e) V =$M_{(2\times2)}$,   E = $\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : b = c + d \quad e \quad a = c\right\}$

Resolução:

E = $\left\{\begin{bmatrix} c & c+d \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$, dim E = 2 e uma base de E é $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

2.8.7 Teorema: Se U e W são subespaços de uma espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $\dim U \leq \dim V$ e $\dim W \leq \dim V$. Além disso,

$$\dim(U + W) = \dim U + dim\ W - \dim\,(U \cap W)$$

Observação: Caso $U \cap W = \{0\}$ então $dim(U \cap W) = 0$ e neste caso,

$$\dim(U + W) = \dim U + dim\ W$$

2.8.8 Exemplo: Considere $V = \{(x, y, z); x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z); x = y\}$. Determine $V + W$, $V \cap W$, $\dim\,(V \cap W)$ e $\dim\,(V + W)$.

Resolução: Observe que

$V = \{(x, y, x + y)\} = \{(x, 0, x) + (0, y, y)\}$, $W = \{(x, x, z)\} = \{(x, x, 0) + (0,0, z)\}$

$V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ e $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

Então,

$V + W$ é gerado pelos vetores $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\ e\ (0, 0, 1)$.

$$V+W=[(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)].$$

Portanto,

Dado $(x,\ y,\ z)\in R^3$ podemos escrever

$$(x,y,z)=c_1(1{,}0{,}1)+c_2(0,1,1)+c_3(1,1,0)+c_4(0,0,1)$$

Escalonando a matriz ampliada temos

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&x\\0&1&1&0&y\\1&1&0&1&z\end{bmatrix}\underset{(L_3\leftarrow L_3-L_1)}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&1&0&x\\0&1&1&0&y\\0&1&-1&1&z-x\end{bmatrix}\underset{(L_3\leftarrow L_2-L_3)}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&0&x\\0&1&1&0&y\\0&0&2&-1&y-z+x\end{bmatrix}$$

Se $c_3=0$ temos

$$c_1=x$$

$$c_2=y$$

$$c_4=z-x-y$$

Portanto, $V+W=R^3$. Observe que a solução deste sistema não é única.

Como $\dim(V+W)=\dim V+dim\ W-\dim\,(V\cap W)$ então:

$\dim(V\cap W)=\dim V+dim\ W-\ \dim(V+W)=2+2-3=1.$

Vamos determinar $V\cap W$.

$$V\cap W=\{(x,y,z);x+y-z=0\ \ e\ \ x=y\}$$
$$=\{(x,x,2x)\}=[(1{,}1{,}2)]$$

2.9 Vetor Coordenada

2.9.1 Definição

Sejam B = {v_1, v_2, **...** , v_n} base de V e v = $\mathbf{a_1}v_1$ + $\mathbf{a_2}v_2$ + ... + $\mathbf{a_n}v_n$.

Chamamos os números a_1, a_2, ..., a_n de coordenadas de v em relação à base B.

Notação: $\mathbf{v_B}$ = (a_1, a_2, ... , a_n) ou na forma matricial $\mathbf{v_B}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{bmatrix}$

Observação: (a_1, a_2, ... , a_n) é denominado vetor-coordenada de v em relação à base B.

2.9.2 Exemplo:

No $\mathbb{R}^2$, consideremos as bases **B** = {(1,1), (-1,1)} e **C** = {(2,0), (1,3)}.

Dado o vetor **v** = (8,6), tem-se:

(8,6) = **7**(1,1) **-1**(-1,1) e (8,6) = **3**(2,0) + **2**(1,3)

Logo, $\mathbf{v_B}$ = (7,-1) é o vetor-coordenada de v em relação à base B

e $\mathbf{v_C}$ = (3,2) é o vetor-coordenada de v em relação à base C

ou na forma matricial $\mathbf{v_B} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v_C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2.10 Mudança de Base

Sejam $\alpha = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ e $\beta = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado $\boldsymbol{v} \in V$, podemos escrevê-lo em função dessas bases

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n & (1a) \\ \boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n & (1b) \end{cases}$$

As coordenadas de $\boldsymbol{v}$ em relação às bases são dadas por:

$$[\boldsymbol{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\boldsymbol{v}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Como α é base de V, podemos escrever os elementos de β como combinação linear dos elementos de α, ou seja:

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{n1}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{w}_2 = a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{n2}\boldsymbol{u}_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \\ \boldsymbol{w}_n = a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{nn}\boldsymbol{u}_n \end{cases} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1b):

$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n$

$\boldsymbol{v} = y_1(a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{n1}\boldsymbol{u}_n) + y_2(a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{n2}\boldsymbol{u}_n) + \cdots + y_n(a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_{2+\cdots+}a_{nn}\boldsymbol{u}_n)$

Como $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$ e as coordenadas em relação a uma base são únicas, segue que:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_{2+\cdots+}a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_{2+\cdots+}a_{2n}y_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_{2+\cdots+}a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (3)$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Denota-se por $[M]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, sendo $[M]_\alpha^\beta$ chamada matriz mudança da base β para a base α.

Portanto, (4) pode ser escrita da forma:

$$[\boldsymbol{v}]_\alpha = [M]_\alpha^\beta [\boldsymbol{v}]_\beta.$$

2.10.1 Exemplo
Sejam α = {(2, -1) ; (3, 4)} e β={ (1, 0); (0, 1)} bases de $\mathbb{R}^2$.

(**a**) Encontre $[M]_\alpha^\beta$ e $[(5,-8)]_\alpha$;

(**b**) Calcule $[M]_\beta^\alpha$ e compare com a matriz $\left([M]_\alpha^\beta\right)^{-1}$.

Resolução:

(**a**) Escrevendo cada vetor da base β como combinação linear da base α, tem-se

$$(1,0) = a(2,-1) + b(3,4)$$

$$(0,1) = c(2,-1) + d(3,4)$$

Isto implica que: $a = 4/11$, $b = 1/11$, $c = -3/11$, $d = 2/11$. Portanto,

$$[M]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

Pode ser utilizado esta matriz para encontrar $[(5,-8)]_\alpha$.

$$[(5,-8)]_\alpha = [M]_\alpha^\beta\,[(5,-8)]_\beta$$

$$= \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$(5,-8) = 4(2,-1) - 1(3,4)$$

Caso o problema fosse simplesmente encontrar as coordenadas de $(5,-8)$ em relação à base β, basta resolver o sistema $(5,-8) = c_1(2,-1) + c_2(3,4)$.

O cálculo feito através da matriz de mudança de base é vantajoso quando se trabalha com mais vetores, pois neste caso não será necessário resolver um sistema de equações para cada vetor.

(**b**) A matriz $[M]_\beta^\alpha$ é fácil de ser calculada já que β é a base canônica.

$$(2,-1) = 2(1,0) - 1(0,1)$$

$$(3,4) = 3(1,0) + 4(0,1)$$

Portanto,

$$[M]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Para a matriz $\left([M]_\alpha^\beta\right)^{-1}$ tem-se que:

$$\left([M]_\alpha^\beta\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Comparando-se as matrizes $[M]_{\beta}^{\alpha}$ e $\left([M]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1}$, nota-se que são iguais. O teorema a seguir generaliza este resultado.

2.10.2 Teorema: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se α e β são duas bases de V então $[M]_{\alpha}^{\beta}$ é inversível e, além disso, tem-se que $\left([M]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} = [M]_{\beta}^{\alpha}$.

2.10.3 Exemplo:
Sejam α = {(1, 1 , 1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)} e β = {(1, 2, 0); (1, 3, 2); (0, 1, 3)} bases de $\mathbb{R}^3$. Determine $[M]_{\alpha}^{\beta}$, $[M]_{\beta}^{\alpha}$ e as coordenadas de $\boldsymbol{v} = (3,2,1) \in \mathbb{R}^3$ em cada uma das bases.

Resolução:
Escrevendo cada vetor da base β como combinação linear da base α, tem-se

$$[M]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema 2.10.2: $[M]_{\beta}^{\alpha} = \left([M]_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -4 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Para o vetor $\boldsymbol{v} = (3,2,1)$, escrito como combinação linear dos vetores da base α, tem-se:

$$[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[v]_{\beta} = [M]_{\beta}^{\alpha}\,[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -4 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -13 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2.11 Algoritmo do espaço linha

Seja $W = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ o subespaço de R^n gerado pelos vetores dados $u_1, u_2, \dots, u_n$.

O algoritmo a ser apresentado é um método para determinar uma base do subespaço W.

Fonte: Lipschutz, S. Álgebra Linear. 3ª Ed. (1994) Makron Books, Coleção Schaum

Algoritmo

a) Forme a matriz cujas linhas são os vetores dados;

b) Reduza a matriz à forma escalonada;

c) As linhas não nulas formam uma base de W.

Observações:

(i) A solução não é única pois podemos escalonar a matriz de várias formas.

(ii) O posto da matriz escalonada é a dimensão do subespaço.

2.11.1 Exemplo: Ache uma base e a dimensão do supespaço W de R^4 gerado por

$$v_1 = (1,0,1,2),\ v_2 = (2,1,1,0), v_3 = (0,-1,1,4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As operações realizadas na segunda matriz foram:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

E na última matriz: $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$.

Como a matriz escalonada possui 2 linhas não nulas, a dimensão do subespaço W é 2 $(\dim(W) = 2)$.

Exercícios

1) Ache uma base e a dimensão do supespaço W de R^4 gerado por

$$u_1 = (1,-4,-2,1),\ u_2 = (1,-3,-1,2),$$

$$u_3 = (3,-8,-2,7)$$

Resp: $\dim(W) = 2$

2) Seja W o subespaço de R^4 gerado pelos vetores

$$u_1 = (1,-2,5,-3),\ u_2 = (2,3,1,-4),$$

$$u_3 = (3,8,-3,-5)$$

a) Encontre uma base e a dimensão de W.

Resp: $\dim(W) = 2$

b) Estenda a base de W a uma base de todo o espaço R^4.

Sugestão: Da matriz escalonada retire a linha nula e acrescente 2 vetores canônicos de R^4 à esta matriz de forma que a matriz resultante esteja na forma escalonada. Desta forma terás 4 vetores LI forma a base de R^4.

3) Determinar uma base do R^4 que contenha os vetores

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (0,1,-1,0), v_3 = (0,2,0,2)$$

4) Seja $V = M_{2\times 2}$(espaço vetorial das matrizes 2×2. Determine a dimensão e uma base do subespaço W de V gerado por $A, B, C\ e\ D$. Caso a dimensão não seja 4 estenda a base de W a uma base de $V = M_{2\times 2}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. **Resp**: $\dim(W) = 3$

5) Seja W o subespaço de R^4 gerado pelos vetores

$$u_1 = (1,2,-1,3,4),\ u_2 = (2,4,-2,6,8),$$

$u_3 = (1,3,2,2,6), u_4 = (1,4,5,1,8)\ e\ u_5 = (2,7,3,3,9)$.

Utilize o algoritmo do espaço linha para encontrar uma base e a dimensão de W.

Resp: $\dim(W) = 3$

6) No espaço vetorial R^3 consideremos os seguintes subespaços:

$$U = \{(0,1,0), (0,0,1)\} \; e \; V = \{(1,2,0), (3,1,2)\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão dos subespaços $U, V, U + V$.

Resp: $\dim(U + V) = 3$.

b) Utilize o teorema

$$\dim(U + V) = \dim U + dim\ V - \dim(U \cap V),$$

para determinar $\dim(U \cap V)$.

c) Encontre $U \cap V$.

2.11.2 Exemplo: No espaço vetorial R^3 considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$S = [(1,-1,2), (2,1,1)], \qquad T = [(0,1,-1), (1,2,1)],$$

$$U = \{(x, y, z): x + y = 4x - z = 0\} \; e$$

$$V = \{(x, y, z): 3x - y - z = 0\}.$$

Determine as dimensões de: (a) S; (b) T; (c) U; (d) V; (e) S+T; (f) $S \cap T$; (g) $T + U$; (h) $T \cap U$.

Resolução:

(a) Escalonando a matriz temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Como a matriz escalonada possui 2 linhas não nulas então $\dim(S) = 2$.

(b) É imediato que $\dim(T) = 2$ pois seus geradores já se apresentam na forma escalonada.

(c) Os vetores de U são da forma: $(x, -x, 4x) = x(1, -1, 4)$. Logo $\{(1, -1, 4)\}$ é uma base de U e $\dim(U) = 1$.

(d) Os vetores de V se apresentam assim:

$$(x, y, 3x - y) = x(1,0,3) + y(0,1,-1).$$

Logo V=$[(1,0,3), (0,1,-1)]$. Como os geradores de V já estão na forma escalonada, então $\dim(V) = 2$.

(e) Escalonando a matriz temos:

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Logo $\dim(S+T) = 3$ e $S + T = R^3$.

(f) $\dim(S \cap T) = \dim S + dim\ T - \dim(S+T)$

$\dim(S \cap T) = 2 + 2 - 3 = 1.$

(g) $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix} \sim$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Portanto $\dim(T+U) = 2.$

(h) $\dim(T \cap U) = \dim T + dim\ U - \dim(T+U)$

$\dim(T \cap U) = 2 + 1 - 2 = 1.$

Exercícios

7) Dar uma base e a dimensão do subespaço W de R^4 onde

$W = \{(x,y,z,t) \in R^4 : x = 2y\ \ e\ \ x - 3y + t = 0\}.$

Resp: $\{(2,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ e $\dim(W) = 2$

8) Sendo W o subespaço do exercício 7 e U o subespaço de R^4 gerado por

$$u_1 = (1,2,1,3),\ u_2 = (3,1,-1,4),$$

Determinar uma base e a dimensão de $U + W$ e de $U \cap W$.

Resp: $\dim(U+W) = 4$ (Logo $U + W = R^4$)

$\dim(U \cap W) = 0.$ Portanto $U \cap W = \{(0,0,0,0)\}$ e $\dim(U \cap W) = \dim(\ \{(0,0,0,0)\}\ ) = 0$

9) No espaço vetorial R^3 consideremos os seguintes subespaços:

$$U = \{(0,y,z)\},\ \ V = \{(x,y,z) : y - 2z = 0\}\ e$$

$$W = [(1,1,0), (0,0,2)].$$

Determinar uma base e a dimensão de $U,\ V,\ W,\ U \cap W,\ U \cap V\ e\ V + W$

Resposta: Bases e dimensões

$$U:\ \{(0,1,0), (0,0,1)\}\ e\ \dim(U) = 2$$

$$V:\ \{(1,0,0), (0,2,1)\}\ e\ \dim(V) = 2$$

$$W:\ \{(1,1,0), (0,0,2)\}\ e\ \dim(W) = 2$$

$$U \cap W: \{(0,0,2)\}\ e\ \dim(U \cap W) = 1$$

$$U \cap V: \{(0,2,1)\}\ e\ \dim(U \cap V) = 1$$

$$V + W = R^3$$

◆ **Exercícios** (Espaços Vetoriais)

1) Verifique se os conjuntos definidos abaixo representam espaços vetoriais

a) $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$; $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$; $a(x, y) = (ax, ay)$

b) $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$; a adição é usual ; $a(x, y) = (ax, 0)$

c) $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$; $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $a(x, y) = (x, ay)$

d) $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$; $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$; $a(x, y) = (ax, ay)$

2) Verifique quais dos conjuntos abaixo representam subespaços vetoriais de R^3 em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in Z\}$

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y \in Q\}$

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3z = 0\}$

e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \le y \le z\}$

3) Verifique quais dos conjuntos abaixo representam subespaços vetoriais do espaço vetorial dos polinômios reais $P(\mathbb{R})$

a) $W = \{f(t) \in p(\mathbb{R}) / f(t)$ tem grau maior que $2\}$

b) $W = \{f(t) \in p(\mathbb{R}) / f(t) > 0, \forall t \in R\}$

4) Seja M_2 o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2. Verifique se os conjuntos abaixo representam subespaços vetoriais de M_2

a) V = $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in R; b = c\right\}$ b) W = $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in R; b = c+1\right\}$

5) Verifique quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ abaixo são linearmente independentes

a) {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 5)} b) {(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)}

c) {(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)} d) {(1, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, -1)}

6) Verifique quais dos subconjuntos de $P_4(\mathbb{R})$ abaixo são linearmente independentes

a) $\{1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$ b) $\{2x, x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1\}$

c) $\{x^2 - x, x^3, 2x^3 - x^2, x\}$ d) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

7) Seja o espaço vetorial M_2 e os vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Escreva o vetor $v = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

8) Seja dado o espaço $P_2(\mathbb{R}) = \{at^2 + bt + c \,/\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$ de P_2.

a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear dos vetores p_1, p_2 e p_3.

b) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear dos vetores p_1 e p_2.

c) Determine os valores de a, b e c de modo que o vetor $p = at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) Verifique se é possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3.

9) Determine o valor de k para que $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{pmatrix}\right\}$ seja LD

10) Seja W o subespaço de M_2 definido por W = $\left\{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}; a,b \in R\right\}$ Verifique se

a) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in W$

11) Seja W o subespaço de M_{3X2} e os vetores $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de W. Verifique se o vetor $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W

12) Seja S o subespaço de M_2 definido por S = $\left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ a+b & -b \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$.

a) Verifique se $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in$ S

b) k = ? para que $\begin{pmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ pertença a S

13) Sejam os vetores v_1 = (1, 1, 1) , v_2 = (1, 2, 0) e v_3 = (1, 3, -1). Determine k, no vetor (3, -1, k), sabendo que ele pertence a [v_1, v_2, v_3]

14) Verifique quais dos seguintes conjuntos formam uma base de R^2. Dentre os que formarem, escreva a configuração do vetor

a) {(1, 2), (-1, 3)}
b) {(3, -6), (-4, 8)}
c) {(0, 0), (2, 3)}
d) {(3, -1), (2, 3)}

15) Verifique quais dos seguintes conjuntos formam uma base de R^3. Dentre os que formarem, escreva os vetores que geram o espaço

a) {(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)}
b) {(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)}
c) {(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)}
d) {(1, 2, 3), (4, 1, 2)}
e) {(0, -1, 2), (2, 1, 3), (-1, 0, 1), (4, - 1, -2)}

16) Dentre os vetores v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (3, 0, 2) e v_4 = (2, -1, 1), verifique se é possível formar uma base de R^3 (se for possível, escreva os vetores que geram o espaço)

17) Seja V = R^3 e o conjunto B = {(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1)} $\subset R^3$. Mostre que B não é base de R^3 e determine uma base de B.

18) Mostre que V = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é base de M_{2x2}.

19) Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n e indique a dimensão deste espaço.

20) Sejam U, V e W os subespaços de R^3 definidos como U = {(x, y, z) / x = z}, V = {(x, y, z) / x = y = 0} e W = {(x, y, z) / x + y + z = 0}. Verifique que U + V = R^3, U + W = R^3 e V + W = R^3. Em cada um dos casos, escreva os vetores que geraram o espaço.

21) Determine os vetores que geram os espaços abaixo, sendo cada um deles um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

a) U = {(x, y, z) / x – 2y = 0}
b) V ={(x, y, z)/x + z = 0, x – 2y = 0}
c) W = {(x, y, z) / x + 2y – 3z = 0}
d) U $\cap$ V
e) V + W

22) Indique o conjunto gerador e uma base do exercício 4-a

23) Dados os espaços vetoriais abaixo, indique sua base e dimensão

a) matrizes diagonais de ordem n
b) matrizes na forma escada de ordem n
c) V = $\left\{\begin{pmatrix} a & a+b \\ a & b \end{pmatrix}; a, b \in R\right\}$
d) V = {(a, a, ..., a) ∈ $\mathbb{R}^n$ }
e) V = {(a, 2a, 3a)}

24) Determinar as coordenadas do vetor v = (6, 2) em relação às bases
a) α = {(3, 0), (0, 2)}
b) β = {(1, 2), (2, 1)}
c) γ = {(1, 0), (0, 1)}
d) δ = {(0, 1), (1, 0)}

25) Sejam β = {(1, 0), (0, 1)}, β_1 = {(-1, 1), (1, 1)}, e β_2 = {(2, 0), (0, 2)} bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.
a) Ache as matrizes mudança de base $(M)_{\beta}^{\beta_1}$, $(M)_{\beta_1}^{\beta}$ e $(M)_{\beta_2}^{\beta}$.
b) Escreva as coordenadas do vetor v = (3, -2) com relação à base β, β_1 e β_2
c) As coordenadas de um vetor v em relação à base β_1 são dadas por $(v)_{\beta 1}$ = $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Escreva as coordenadas de v com relação às bases β e β_2.

26) Se $(M)_{\beta}^{\beta_1}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, determine:

a) $(v)_{\beta}$, onde $(v)_{\beta 1}$ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $(v)_{\beta 1}$, onde $(v)_{\beta}$ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

27) Sejam β_1 = {(1, 0), (0, 2)}, β_2 = {(-1, 0), (1, 1)}, e β_3 = {(-1, -1), (0, -1)} bases ordenadas de R^2. Determine $(M)_{\beta_2}^{\beta_1}$, $(M)_{\beta_2}^{\beta_3}$, $(M)_{\beta_1}^{\beta_3}$ e $(M)_{\beta_1}^{\beta_2}$.

28) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x + y = 0\ \ e\ \ z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x - y - z + t = 0\}$ subespaços de R^4.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.

b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.

c) Determine $W_1 + W_2$.

d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

e) $W_1 + W_2 = R^4$?

29) Sejam $W_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = d\ \ e\ \ b = c\right\}$ e $W_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a = c\ \ e\ \ b = d\right\}$ subespaços de $M(2{,}2)$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.

b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2{,}2)$?

Respostas (Espaços Vetoriais)

1 a) não b) não c) não d) não

2 a) sim b) não c) não d) sim e) não

3 a) sim b) não

4 a) sim b) não

5 a) LD b) LI c) LD d) LI

6 a) LD b) LD c) LD d) LI

7 $v = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3$

8 a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$ b) não é possível c) $a + 2b - c = 0$ d) não é possível

9 $k = 3$

10 a) sim ($a = 0$, $b = -1$) b) não

11 não

12 a) sim ($a = 3$, $b = -2$) b) $k = -2$

13 $k = 7$

14 a) $(x - y, 2x + 3y)$ b) não forma base c) não forma base d) $\{(3x + 2y, -x + 3y)\}$

15 a) $\{(x + 2y + 3z, x - y + 2z, -x)\}$ b) não forma base c) $\{(2x - y, x, -x + y + z)\}$

d) não forma base e) não forma base

16 $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ $\{(x + y + 3z, x + 2y, x + 3y + 2z)\}$

17 $B = \{v_1, v_2\}$

19 $\dim M_n = n^2$

20 $U+V = [(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ $(x, y, x + z)$

$U+W=[(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)]$ $(x + z, y, x - z)$

$V+W=[(0, 0, 1),(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$ $(y, z, x - y - z)$

21 a) $[(2, 1, 0), (0, 0, 1)]$ b) $[(2, 1, -2)]$ c) $[(-2, 1, 0), (3, 0, 1)]$

d) $[(2, 1, -2)]$ e) $[(0, 2, -2), (3, 0, 1)]$

22 $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

23 a) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & . & . & 0 \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ . & 1 & & . \\ . & & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & . & . & 0 \\ . & . & & . \\ . & & . & . \\ 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim V = n$

b) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & . & . & 0 \\ . & 1 & & . \\ . & & . & . \\ 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim V = 1$ c) $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\dim V =2$

d) $B = \{(1, 1, ..., 1)\}$, $\dim V = 1$ e) $B = \{(1, 2, 3)\}$, $\dim V = 1$

24 $v_\alpha = (2, 1)$, $v_\beta = \left(\frac{-2}{3}, \frac{10}{3}\right)$ $v_\gamma = (6, 2)$, $v_\delta = (2, 6)$

25 a)$[M]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $[M]_{\beta_1}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[M]_{\beta_2}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b)$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ c) $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

26 a)$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, b) $[v]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

27 $[M]_{\beta_2}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $[M]_{\beta_2}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $[M]_{\beta_1}^{\beta_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$, $[M]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

28 (a) $W_1 \cap W_2 = [(0,0,1,1)]$;

(b) Uma base para $W_1 \cap W_2$ é $\{(0,0,1,1)\}$;

(c) $W_1 + W_2 = [(-1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0), (-1,0,0,1)]$;

(d) $W_1 + W_2$ não é soma direta pois $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$;

(e) Sim. Sugestão: Exiba uma para base para $W_1 + W_2$.

3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1 Introdução

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T: V→W é chamada *transformação linear* de V em W, se $\forall u, v \in V \ e \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:
(i) T(u+v) = T(u) + T(v);

(ii) T(αu) = αT(u)

Observação: Decorre da condição (ii) que se $\alpha = 0$ então $T(0u) = 0T(u) = 0$, portanto a transformação linear $T: V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W, isto é, $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.
Isto ajuda a detectar transformações não lineares, se $T(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$. Se $F(x, y) = x + y + 1$ temos que $F(0,0) = 1 \neq 0$ e, portanto, F não é linear.
Mas cuidado $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ não é suficiente para que T seja linear. Por exemplo, se $G(x, y) = (x^2, 2y)$ temos $G(0,0) = (0,0)$ mas G não é uma transformação linear. Verifique!

3.1.1 Definição: Uma transformação linear de V em V (é o caso de V=W) é chamada *operador linear* sobre V.

- **Exercícios**: Verifique se as funções T, G, F e H são transformações lineares. Caso alguma função não seja transformação linear apresente um exemplo de modo que não satisfaça uma das condições da definição 3.1.

a) T : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por T(x,y)=(3x,-2y,x-y)

b) G: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $G(u) = \beta u, \ \forall \beta \in \mathbb{R}$

c) F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por F(u)=$u^2$

d) H: $M_{2\times2} \to \mathbb{R}$, definida por $H(A) = \det(A)$

3.1.2 Exemplos:

1) Sejam $V = W = P_n$ (polinômios de grau $\leq n$ e $D: P_n \to P_n$, a aplicação derivada que a cada polinômio f associa sua derivada por $D(f) = f'$. Para quaisquer funções deriváveis, D é uma transformação linear pois

$$D(f + g) = f' + g' = D(f) + D(g)$$

$$\text{e} \qquad D(kf) = (kf)' = kf' = kD(f).$$

2) $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$

Seja A uma matriz $m \times n$. Define-se a função $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $L(\boldsymbol{v}) = A.\boldsymbol{v}$

onde $\boldsymbol{v}$ é o vetor coluna, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $L(v) = A.\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Das propriedades de operações de matrizes tem-se:

Sejam

$$L(u+v) = A.\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = A.\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + A.\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} =$$

$$L(u+v) = A(u+v) = Au + Av = L(u) + L(v)$$

e

$$L(\propto u) = A(\propto u) = \propto (Au) = \propto L(u)$$

Portanto, L é uma transformação linear.

3.1.3 Interpretação geométrica

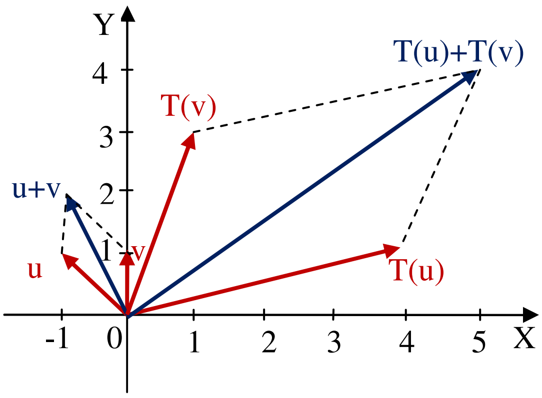
Uma interpretação geométrica do significado de uma transformação linear T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pode ser dada considerando, por exemplo, o operador linear.

T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(-3x+y,2x+3y)

Se u=(-1,1) e v=(0,1), tem-se u+v=(-1,2)

T(u)=(4,1) e T(v)=(1,3)

T(u)+T(v)=(5,4) e T(u+v)=(5,4)



Sendo u+v a diagonal do paralelogramo determinado por u e v, sua imagem T(u+v) representa a diagonal do paralelogramo determinado por T(u) e T(v), isto é, T(u+v)=T(u)+T(v). Diz-se, nesse caso, que T representa a adição de vetores.

Se multiplicar o vetor u por 2, por exemplo, sua imagem T(u) também fica multiplicada por 2, isto é, T(αu)= αT(u). Diz-se que nesse caso, que T preserva a multiplicação de um vetor por um escalar.

- **Exercício**: Suponha que T seja uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (2,-3,1)$ e $T(2,3) = (1,0,-1)$.

  a) Prove que os vetores $u = (1,1)$ e $v(2,3)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

b) Escreva (x,y) como combinação linear de u e v.

c) Aplique a transformação T na combinação linear encontrada no item anterior.
Qual é a transformação linear T ?

3.1.4 Teorema

Dados dois espaços vetoriais V e W e uma base de $V, \{v_1, \dots, v_n\}$. Então existe uma única transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$, para elementos arbitrários $w_1, \dots, w_n$ de W. Esta aplicação é dada por:

se $v = a_1 v_1 + \ \dots + a_n v_n$ (v é uma combinação linear de $v_1, \dots, v_n$),

$$T(v) = a_1 T(v_1) + \ \dots + a_n T(v_n)$$

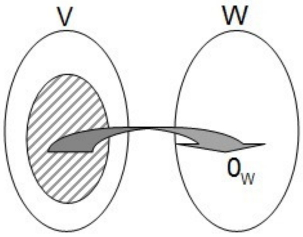
- **Exercício**

Sejam T:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e B={v_1=(0,1,0), v_2=(1,0,1) e v_3=(1,1,0)} uma base do $\mathbb{R}^3$.

Sabendo que T(v_1)=(1,-2), T(v_2)=(3,1) e T(v_3)=(0,2), determinar T(x,y,z).

3.2 Núcleo de uma transformação linear

3.2.1 Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\boldsymbol{v} \in V$ tais que $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ é denominado núcleo de T, sendo denotado por $N(T)$ ou $Ker(T)$.



N(T) = {v∈V: T(v)=0} ⊂V

Observação: $N(T) \neq \emptyset$ pois $0 \in N(T)$ uma vez que T(0)=0.

- **Exercícios:**

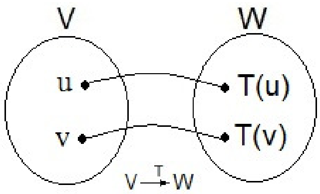
1) Determinar o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (x - 2y, x + 3y)$.

2) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x,y,z) = (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z)$, determinar o núcleo da transformação.

3.3 Imagem de uma transformação linear

3.3.1 Definição: Uma transformação linear $T: V \to W$ é ***injetora*** se T leva vetores distintos de Vem vetores distintos de W.

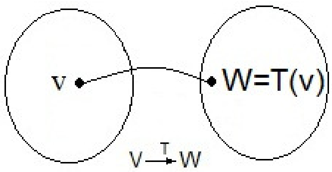
Logo, para quaisquer vetores distintos $u, v \in V$ implica que $T(u) \neq T(v)$. Isto é o mesmo dizer que se $T(u) = T(v) \to u = v$ quaisquer que sejam $u, v \in V$.



$$Im(T) = \{w \in W: \ T(v) = w\}$$

$Im(T) \neq \emptyset$ pois T(0)=0 $\in$ Im(T).

Se $Im(T) = W$, então T é ***sobrejetora***. Em outras palavras, T é sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.



Se T é sobrejetora, a imagem de T coincide com W.

3.4 Propriedades

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então:

$a)$ $N(T)$ é um subespaço de V.

De fato, sejam u, v_1 e $v_2 \in$ N(T) e $\alpha \in \mathbb{R}$. Desejamos mostrar que $v_1 + v_2 \in N(T)$ e $\alpha u \in N(T)$, isto é, que $T(v_1 + v_2) = 0$ e $T(\alpha u) = 0$.

i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0;$

ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0 = 0.$

b) $Im(T)$ é um subespaço de W.

Sejam w, w_1 e $w_2 \in Im(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $\alpha w \in Im(T)$, isto é, que existem $a, b \in V$ tais que $T(a) = w_1 + w_2$ e $T(b) = \alpha w$. Como w, w_1 e $w_2 \in Im(T)$ existem $v, v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v) = w$, $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Fazendo $a = v_1 + v_2$ e $b = \alpha v$ temos que

$$T(a) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2,$$

$T(b) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w.$

$c)$ T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0_V\}$

Na primeira parte vamos mostrar que se T é injetora, então $N(T) = \{0_V\}$.

Seja $v \in N(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Por outro lado, como T é linear, $T(0) = 0$. Logo, $T(v) = T(0)$.

Como T é injetora por hipótese, $v = 0$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.

Na segunda parte como $N(T) = \{0\}$ vamos mostrar que T é injetora.

Sejam v_1 e $v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então, $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor zero, e, portanto, $v_1 - v_2 = 0$, isto é, $v_1 = v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2)$ e $v_1 = v_2$ então T é injetora.

3.5 Teorema: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Então

$$\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$$

- **Exercício:**

Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Determine a imagem de T, o núcleo de T e os vetores geradores de $Im(T)$ e $N(T)$. Verifique o teorema.

- **Exercício**:

1. Dado o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

a) Determinar o núcleo de T, a dimensão do núcleo e uma de suas bases.

b) Determinar a imagem de T, a dimensão da imagem e uma de suas bases.

c) Verificar as propriedades da dimensão.

3.6 Corolários

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e $\dim(V) = \dim(W)$.

(i) Então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

(ii) Se T é injetora, então T transforma base em base, isto é, se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V, então $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é base de W.

3.7 Definição

Quando uma transformação linear $T: V \to W$ for injetora e sobrejetora, dá-se o nome de **isomorfismo**.

Quando há tal transformação entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são isomorfos e possuem a mesma dimensão. Um isomorfismo leva base em base e além disso, um isomorfismo $T: V \to W$ tem uma aplicação inversa $T^{-1}: W \to V$, que é linear e também um isomorfismo.

◆ **Exercício**

1) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x - 2y\,,\; z\,,\; x + y)$.

a) Mostrar que T é um isomorfismo.

b) Calcular T^{-1}.

Resposta: $T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$

3.8 Aplicações lineares e matrizes

Em um dos exemplos de transformações lineares vimos que a toda matriz $m \times n$ está associada uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(\boldsymbol{v}) = A.\boldsymbol{v}$, onde $\boldsymbol{v}$ é o vetor coluna $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ e $L(v) = A.\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. Logo a seguir, será formalizado este resultado para espaços vetoriais V e W e também estabelecer o seu recíproco, isto é, uma vez fixadas as bases, a toda transformação linear $T: V \to W$ estará associada uma única matriz.

Inicialmente, veremos que dados dois espaços vetoriais V e W com bases β e γ e uma matriz A, podemos obter uma transformação linear.

3.8.1 Considere $V = W = R^2$ e as bases $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,1), (-1,1)\}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Deseja-se associar a esta matriz A uma transformação linear que dependa de A e das bases β e γ, isto é, $T_A: R^2 \to R^2$. As coordenadas de v em relação à base β é representada por $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Portanto,

$$A[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = [T_A(v)]_\gamma.$$

Então,

$$T_A(v) = 2x(1,1) + y(-1,1) = (2x - y, 2x + y)$$

Note que se tivéssemos partido de $\beta = \gamma = \{(1,0),(0,1)\}$, teríamos obtido $T_A(v) = (2x, y) = Av$.

De modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ e $\gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$, à matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

podemos associar $T_A: R^n \to R^m$ com AX da seguinte forma:

Seja $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ então

$$A[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [T_A(v)]_\gamma$$

Então, $T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$ onde $y_i = A_i[v]_\beta$ e A_i é a i-ésima linha de A.

Em geral, dada uma matriz $A_{m \times n}$, essa é encarada com uma transformação linear $T_A: R^n \to R^m$ em relação às bases de R^n e R^m.

Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Determine a transformação linear $T_A: R^3 \to R^2$.

Resolução: Seja $[v]_\gamma = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, então

$$A[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y + 5z \\ 2x + 4y - z \end{bmatrix} = [T_A(v)]_\beta.$$

Logo $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z)(1,0) + (2x + 4y - z)(0,1) =$

$= (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)$

3.8.2 Agora vamos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T: V \to W$ linear, $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V e $\gamma = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W. Então $T(v_1), \cdots, T(v_n)$ são vetores de We portanto

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m$$
$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, anotada por $[T]_\gamma^\beta$, é denominada matriz de T em relação às bases β e γ.

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Note que T passa a ser a transformação linear associada à matriz A e às bases β e γ.

Observações: Em relação à matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$ temos que a primeira coluna é formada pelas coordenadas de $T(v_1)$ em relação à base γ, isto é, $[T(v_1)]_{\gamma}$; a segunda coluna é formada por $[T(v_2)]_{\gamma}$; de modo geral, a matriz $[T]_{\gamma}^{\beta}$ pode ser representada por

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \big[[T(v_1)]_{\gamma} \quad [T(v_2)]_{\gamma} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{\gamma}\big]$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{array}$$

3.8.3 Exemplos

Exemplo 1: Seja $T: R^3 \to R^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z)$.

Sejam $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e $\gamma = \{(1,3), (1,4)\}$. Determine $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

Resolução: Aplicando T nos elementos da base β, temos:

$$T(1,1,1) = (2,5) = 3(1,3) - 1(1,4)$$

$$T(1,1,0) = (3,1) = 11(1,3) - 8(1,4)$$

$$T(1,0,0) = (2,3) = 5(1,3) - 3(1,4)$$

Então

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Note que se fixarmos outras bases β e γ, teremos uma outra matriz para a transformação T.

Exemplo 2: Seja T a transformação linear do Exemplo 1 e sejam $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\gamma = \{(1,0), (0,1)\}$. Calcule $[T]_{\gamma}^{\beta}$.

Resolução:

$$T(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) = 3(0,1)$$

$$T(0,1,0) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1)$$

$$T(0,0,1) = (-1,4) = -1(1,0) + 4(0,1)$$

Então

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: Dada as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ de R^2 e $\gamma = \{(0,3,0),(-1,0,0),(0,1,1)\}$ de R^3, encontre a transformação linear $T: R^2 \to R^3$ cuja matriz é

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: Interpretando a matriz, temos:

$$T(1,1) = 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1)$$
$$T(0,1) = 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3)$$

Devemos encontrar agora $T(x,y)$. Para isto escrevemos (x,y) em relação à base β:

$$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$$

Aplicando T e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xT(1,1) + (y-x)T(0,1) \\ &= x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3) \\ &= (x, 9y-10x, 3y-4x) \end{aligned}$$

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.9 Definição: Se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares, a composição de S com T é a aplicação SoT definida por

$$(SoT)(u) = S(T(u))$$

onde u é um elemento de U.

Observe que SoT é uma aplicação de U em W. Note também que, para a definição fazer sentido, a imagem de T deve estar contida no domínio de S.

3.10 Teorema: Se $T: U \to V$ e $S: V \to W$ são transformações lineares, então a composta $SoT: U \to W$ é uma transformação linear.

3.11 Transformações do plano no plano

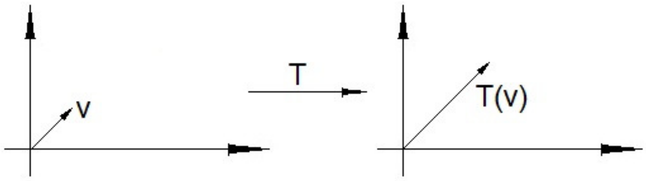
Nesta seção iremos apresentar representações geométricas de algumas transformações lineares do plano no plano ($T: R^2 \to R^2$).

3.11.1 Expansão (ou Contração)

$T: R^2 \to R^2$ onde $T(x,y) = \alpha(x,y)$, escrevendo na forma de vetores-coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por exemplo: Se $\alpha = 2$ (expansão) então a função $T(v) = 2v$ leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo maior. Portanto, se $|\alpha| > 1$, T é uma expansão e caso $|\alpha| < 1$, T é uma contração.

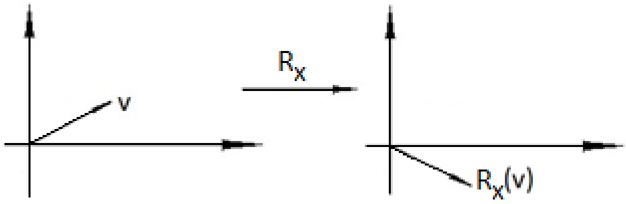


3.11.2 Reflexão em torno do eixo x

$R_x(x, y) = (x, -y)$

Na forma de vetores-coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

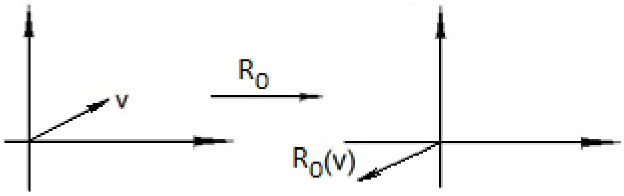


3.11.3 Reflexão na origem

$R_O(x, y) = (-x, -y)$

Escrevendo na forma de vetores-coluna, temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



3.11.4 Rotação de um ângulo θ: (no sentido anti-horário)

$R_\theta(x, y) = (x\, cos\theta - y sen\theta, y\, cos\theta + x\, sen\theta)$

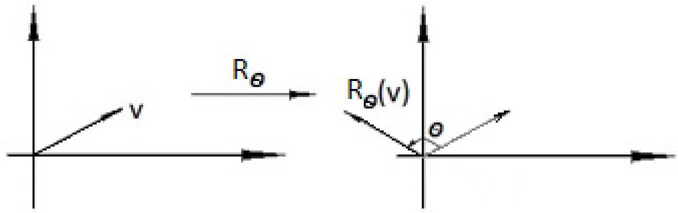
Na forma coluna temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\, cos\theta - y sen\theta \\ y\, cos\theta + x\, sen\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Considere o caso particular onde $\theta = \pi/2$. Daí temos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

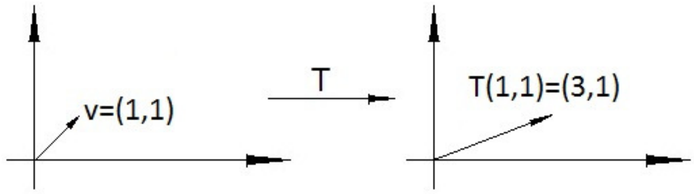
Logo, $R_{\pi/2}(x, y) = (-y, x)$.



3.11.5 Cisalhamento horizontal

$T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \epsilon R$

Por exemplo: para $\alpha = 2$ temos $T(x, y) = (x + 2y, y)$



◆ **EXERCÍCIOS** (Transformações Lineares)

1 Determine quais das funções abaixo representam transformações lineares:
a) f: $R^2 \to R^2$; $(x, y) \to (x + y, x - y)$
b) g: $R^2 \to R$; $(x, y) \to xy$
c) h: $M_2 \to R$; $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
d) k: $P_2 \to P_3$; $ax^2 + bx + c \to ax^3 + bx^2 + cx$
e) m: $R^3 \to R^2$; $(x, y, z) \to (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
f) n: $R \to R$; $x \to |x|$

2 a) Ache a transformação linear T: $R^3 \to R^2$ tal que T(1, 0, 0) = (2, 0) , T(0, 1, 0) = (1, 1) e T(0, 0, 1) = (0, -1).

b) Encontre v de R^3 tal que T(v) = (3, 2)

3 a) Qual é a transformação linear T: $R^2 \to R^3$ tal que T(1, 1) = (3, 2, 1) e T(0, -2) = (0, 1, 0)?

b) Ache T(1, 0) e T(0, 1);

c) Qual é a transformação linear S: $R^3 \to R^2$ tal que S(3, 2, 1) = (1, 1), S(0, 1, 0) = (0, -2) e S(0, 0, 1) = (0, 0)?

4 a) Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta x = y

b) Escreva-a em forma matricial

5 No plano, uma rotação anti-horária de 45º é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação no plano.

6 – Qual a aplicação que representa uma contração de $1/\sqrt{2}$ seguida por uma rotação horária de 45º?

7 Sejam α = {(1, -1), (0, 2)} e β = {(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)} bases de R^2 e R^3 respectivamente e $(T)_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Ache T;

b) Se S(x, y) = (2y, x – y, x), ache $(S)_\beta^\alpha$;

c) Ache uma base γ de R^3 tal que $(T)_\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

10 No exercício 7, determine ker(T), Im(T), ker(S) e Im(S) e verifique o teorema da dimensão

11 Considere a transformação linear T: $R^3 \to R^3$ dada por T(x, y, z) = (z, x – y, - z).

a) Determine ker(T) e sua base

b) Determine dim(Im(T))

c) T é sobrejetora? Justifique

d) Faça um esboço de ker(T)

12 Sejam α = {(0, 2), (2, -1)} e β = {(1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 0, 1)} bases de R^2 e R^3 e

$(S)_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Determine S(x, y)

13 a) Determine a transformação linear T: $R^3 \to R^2$ tal que T(1, -1, 0) = (1, 1), T(0, 1, 1) = (2, 2) e T(0, 0, 1) = (3, 3).

b) Ache T(1, 0, 0) e T(0, 1, 0)

14 Seja T: $R^3 \to R^2$ uma transformação linear definida por T(1, 1, 1) = (1, 2), T(1, 1, 0) = (2, 3) e T(1, 0, 0) = (3, 4).

a) Determine T(x, y, z)

b) Determine v ∈ R^3 tal que T(v) = (-3, -2)

c) Determine v ∈ R^3 tal que T(v) = (0, 0).

15 Determine a transformação linear T: $P_2 \to P_2$ tal que T(1) = x, T(x) = 1 – x^2 e T(x^2) = x + $2x^2$

16 Determine, para cada transformação linear abaixo, o núcleo, a imagem e a dimensão de cada uma. Verifique se cada uma delas é injetora e/ou sobrejetora e se satisfaz o teorema da dimensão.

a) T: $R^2 \to R^2$; T(x, y) = (3x – y, -3x + y)

b) T: $R^2 \to R^3$; T(x, y) = (x + y, x, 2y)

c) T: $R^2 \to R^2$; T(x, y) = (x – 2y, x + y)

d) T: $R^3 \to R^2$; T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x – y + z)

e) T: $R^3 \to R^3$; T(x, y, z) = (x – y – 2z, - x + 2y + z, x – 3z)

f) T: $R^3 \to R^3$; T(x, y, z) = (x – 3y, x – z, z - x)

g) T: $P_1 \to R^3$; T(at + b) = (a, 2a, a - b)

17 Consideremos a transformação linear T: $R^3 \to R^2$ definida por T(x, y, z) = (2x + y – z, x + 2y) e as bases A = {(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)} do R^3 e B = {(-1, 1), (0, 1)} do R^2. Determine $(T)_B^A$

18 Sabendo que a matriz de uma transformação linear T: $R^2 \to R^3$ nas bases A = {(-1, 1), (1, 0)} do R^2 e B = {(1, 1, -1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)} do R^3 é $(T)_B^A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, encontre a expressão T(x, y) e a matriz (T).

19 Seja (T) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ a matriz canônica de uma transformação linear T: $R^2 \to R^3$. Se T(v) = (2, 4, -2), calcule v.

20 Seja T: $R^3 \to R^2$ tal que $(T)_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sendo B_1 = {(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)} e B_2 = {(-1, 0), (0, -1)} bases do R^3 e do R^2 respectivamente.

a) Encontre a expressão de T(x, y, z)

b) Determine ker(T) e sua base

c) Determine Im(T) e sua base

d) T é injetora? T é sobrejetora? Justifique

21 Seja T: $R^2 \to R^2$ definida por (T) = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Determine os vetores u, v e w tais que

a) T(u) = u b) T(v) = 2v c) T(w) = (4, 4)

22 Seja o espaço vetorial V = M_2 e a transformação linear T: V → R^3 definida por
$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix}\right)$ = (a + b, c – d, 2a).

a) Mostre que T é linear

b) Determine $(T)_B^A$ sendo A e B as bases canônicas de M_2 e R^3, respectivamente

c) Calcule v ∈ V tal que T(v) = (3, -2, 4)

d) Determine ker(T)

23 Sejam F: $R^2 \to M_2$ uma transformação linear e α e β as bases canônicas de R^2 e M_2, respectivamente. Sabendo que $(F)_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, determine

a) F(1, 0) b) F(0, 1) c) F(2, 3) d) (a, b) tal que F(a, b) = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

24 Dadas as transformações lineares abaixo, verifique quais dentre elas representam um isomorfismo. Defina a transformação inversa daquelas que representarem.

a) T: $R^2 \rightarrow R^2$; T(x, y) = (3x – 4y, - x + 2y)

b) T: $R^2 \rightarrow R^2$; T(x, y) = (x – 2y, - 2x + 3y)

c) T: $R^2 \rightarrow R^2$; T(x, y) = (2x – y, - 4x + 2y)

d) T: $R^3 \rightarrow R^3$; T(x, y, z) = (x – y + 2z, y – z, 2y – 3z)

e) T: $R^3 \rightarrow R^3$; T(x, y, z) = (x – y + 2z, y – z, - 2x + y – 3z)

f) T: $R^3 \rightarrow R^3$; T(x, y, z) = (x + z, x – z, y)

25 Seja o operador linear T: $R^3 \rightarrow R^3$ definida pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Mostre que T é um isomorfismo
b) Determine a lei que define T^{-1}
c) Utilize a matriz (T) para obter o vetor v ∈ R^3 tal que T(v) = (2, -3, 0)

26 Sejam T e S operadores lineares de R^2 definidos por S(x, y) = (x – 2y, y) e T(x, y) = (2x, -y). Determine:

a) S + T b) T – S c) 2S + 4T d) $S \circ T$ e) $T \circ S$ f) $S \circ S$

27 Seja a transformação linear S: $R^3 \rightarrow R^4$, S(x, y, z) = (x + y, z, x – y, y + z). Calcule $(S \circ T)$(x, y) se T: $R^2 \rightarrow R^3$ é definida como T(x, y)=(2x + y, x – y, x – 3y)

RESPOSTAS (Transformações Lineares)

1 a) sim b) não c) não d) sim e) sim f) não

2 a) (2x + y, y – z) b) (x, 3 – 2x, - 2x + 1)

3 a) $\left(3x, \frac{5x-y}{2}, x\right)$ b) $\left(3, \frac{5}{2}, 1\right)$; $\left(0, \frac{-1}{2}, 0\right)$ c) $\left(\frac{x}{3}, -2y+\frac{5x}{3}\right)$

4 b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ c) (x – y, x + y)

6 $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$

7 a) $\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right)$ b) $(S)^{\alpha}_{\beta} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -11 & 20 \\ -4 & 10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ c) γ = {(1, 1, 1), (-1, -1, 2)}

10 N(T) = {0}, Im(T)=$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)\right]$, N(S) = {0}, Im(S) = [(0, 1, 1), (2, -1, 0)]

11 a) N(T) = {(x, x, 0) , ∀ x ∈ R} base = {(1, 1, 0)}
b) 2 c) não d) reta x = y (no espaço)

12 $\left(y-\frac{3x}{2}, y+\frac{x}{2}, -2y-3x\right)$

13 a) (-y + 3z, -y + 3z) b) (0, 0) ; (-1, -1)

14 a) (3x – y – z, 4x – y - z) b) v = (1, y, - y + 6) c) v = (0, -z, z)

15 $(2a - b)x^2 + (a + c)\,x + b$

16 a) ker(T) = [(1, 3)] dim(ker(T)) = 1 → não Im(T) = [(-1, 1)] dim(Im(T)) = 1 → não

b) ker(T) = {0} dim(ker(T)) = 0 → sim Im(T) = [(1, 1, 0), (1, 0, 2)] dim(Im(T))=2→não

c) ker(T) = {0} dim(ker(T)) = 0 → sim Im(T) = [(1, -2), (1, 1)] dim(Im(T)) =2→sim

d) ker(T) = [(1, -3, -5)] dim(ker(T)) = 1 → não Im(T) = [(2, -1), (-1,1)] dim(Im(T))=2→sim

e) ker(T)=[(3, 1, 1)] dim(ker(T)) = 1 → não Im(T) = [(-1, 2, 0), (-2, 1, -3)] dim(Im(T))=2→não

f) ker(T)=[(1, $\frac{1}{3}$, 1)] dim(ker(T))=1 → não Im(T) = [(1, 1, -1), (0, -1, 1)] dim(Im(T))=2→não

g) ker(T) = {0} dim(ker(T)) = 0 → sim Im(T) = [(1, 2, 1), (0, 0, -1)] dim(Im(T))=2→não

17 $(T)_B^A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

18 (8x + 18y , 6x + 11y , - 2x – 4y) $(T) = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

19 v = (2, 0)

20 a) (-2y + z, - x + y) b) ker(T) = [(1, 1, 2)] dim(ker(T)) = 1

c) Im(T) = [(0, -1), (-2, 1)] dim(Im(T)) = 2 d) não ; sim

21 a) (0, 0) b) (3y, y) c) (1, 1)

22 b) $(T)_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ d-2 & d \end{pmatrix}$ d) ker(T) = $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{pmatrix}, \forall d \in R\right\}$

23 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) F(x, y) = $\begin{pmatrix} x & 2x+y \\ 3x-2y & -x+2y \end{pmatrix}$ não é possível determinar (a, b)

24 a) sim ; $T^{-1} = \left(x+2y, \frac{x+3y}{2}\right)$ b) sim ; T^{-1} = (-3x – 2y , - 2x – y) c) não

d) sim ; T^{-1}=(x– y +z, 3y– z, 2y – z) e) não f) sim ; $T^{-1} = \left(\frac{x+y}{2}, z, \frac{x-y}{2}\right)$

25 b) T^{-1} = (x + z, 2x – y + z, - z) c) v = (2, 7, 0)

26 a) (3x – 2y, 0) b) (x + 2y , - 2y) c) (10x – 4y, - 2y) d) (2x + 2y, - y)
e) (2x – 4y, - y) f) (x – 4y, y)

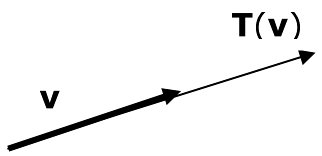
27 S_oT = (3x, x – 3y, x + 2y, 2x – 4y)

4

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma transformação linear, **T**: V $\rightarrow$ V estamos interessados em saber que vetores (não nulos) são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor **v** $\in$ V e um escalar λ real tais que

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \lambda.\mathbf{v}$$



Neste caso **T**(**v**) será um vetor de mesma "direção" que v.
O escalar λ será chamado autovalor e o vetor **v** um autovetor. Vamos formalizar este conceito.

4.1 Definição

Seja **T**: V $\rightarrow$ V uma transformação linear.

Se existirem **v**$\in$ V, **v**$\neq 0$, e $\lambda \in \Re$ tais que T(**v**) = λ.**v**, então

λ é um ***autovalor*** de T e **v** um ***autovetor*** de T associados a λ.

Observe que λ pode ser o número 0, embora **v** não possa ser o vetor nulo.

4.1.1 Exemplos:

1) Seja $T_1: \Re^2 \rightarrow \Re^2$ dado por $T_1(x,y) = 2.(x,y)$.

Neste caso $\lambda = 2$ é o autovalor de T_1

E qualquer vetor $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T_1 associado a $\lambda=2$.

2) $T_2: \Re^2 \rightarrow \Re^2$ onde $T_2(x,y) = (x, -y)$

Note que $T_2(0, -y)=(0,-y)=-1(0, y)$

Portanto, $\lambda_1=-1$ é o autovalor de T_2 e todo vetor $v_1=(0,y)$, tal que $y\neq 0$, é um autovetor de T_2.

Observe também que $T_2(x,0)=(x,0)=1(x,0)$

Então, $\lambda_2=1$ é o autovalor de T_2 e todo vetor $v_2=(x,0)$, tal que $x\neq 0$, é um autovetor de T_2.

3) Quais são as matrizes associadas às Transformações Lineares em relação à base canônica, nos exemplos 1 e 2?

Temos que: $T_1(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $T_2(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Comentário:

As noções de autovetor e autovalor de uma transformação linear (ou matriz) são fundamentais, por exemplo, em Física Atômica porque os níveis de energia dos átomos e moléculas são dados por autovalores de determinadas matrizes. Também o estudo dos fenômenos de vibração, análise de estabilidade de um avião e muitos outros problemas de Física levam à procura de autovalores e autovetores de matrizes.

4.2 Autovalores e Autovetores de uma matriz

Lembre-se que toda transformação linear T: $\Re^n \to \Re^n$ está associada a uma matriz A(n x n) em relação à base canônica, isto é, T(v) = A .v.

Logo, o autovalor e o autovetor de A é o autovalor e autovetor de T.

Portanto, o autovalores λ e o autovetores v, são soluções das equações da seguinte relação T(v) = λ.v, isto é , A.v=λ.v, v$\neq$0 (v vetor não nulo).

4.3 Polinômio Característico

Método prático para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz. Observe que, se I for a matriz identidade de ordem 2, então a equação acima pode ser escrita na forma

$$A.v = v\lambda \quad \Rightarrow \quad A.v = (\lambda I)v \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)v = \mathbf{0}$$

Exemplificando:

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de 2 equações e 2 incógnitas.

Pela regra de Cramer, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução trivial, ou seja, x=y=0.

Mas estamos interessados em calcular os autovetores de A, isto é, vetores v$\neq$0, portanto $(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$, ou seja,

$$det(A - \lambda I) = -(3 + \lambda).(2 - \lambda) + 4 = 0 \;\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

Denominamos de $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ de **polinômio característico** de A.

Continuando a resolução, temos que $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$ são as raízes do polinômio característico, e portanto os autovalores da matriz A são -2 e 1.

Através dos autovalores encontramos os autovetores.

(i) Substituindo $\lambda_1 = -2$ em $\begin{bmatrix} -3-\lambda_1 & 4 \\ -1 & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad -x + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4y$$

O autovetor associado a λ_1 é $v_1=(4y,y)$, $y \neq 0$, ou $v_1=(x,x/4)$, $x \neq 0$

(ii) Substituindo $\lambda_2 = 1$ em $\begin{bmatrix} -3-\lambda_2 & 4 \\ -1 & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = y$$

O autovetor associado a λ_2 é $v_2=(x,x)$, $x \neq 0$.

4.4 Teorema

Seja a equação polinomial $\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n = 0$, onde c_1, ... , c_n são inteiros.
Então, se existir soluções inteiras, estas são divisores do termo c_n.

4.4.1 Exemplo: As possíveis raízes inteiras da equação $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 6 = 0$ são os divisores de -6 que são, $\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6$.

Se $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 6$, então $\lambda_0 = 2$ é uma das raízes do polinômio $p(\lambda)$, pois p(2)=0.
Para as outras possibilidades, não encontramos raízes.

Mas, dividindo p(λ) por $\lambda - \lambda_0$, onde λ_0 é uma raiz de p(λ), temos,

$$p(\lambda) = (\lambda - 2).(\lambda^2 + 3)$$

Logo, as outras raízes serão soluções da equação $\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-3}$

Considerando raízes no campo complexo, temos $\lambda = \pm i\sqrt{3}$.

Então, as raízes de p(λ) são: 2, $i\sqrt{3}$,$-i\sqrt{3}$.

Observação: Vale lembrar que uma equação polinomial com coeficientes reais pode não admitir raízes reais, neste caso, ela possui raízes complexas. Assim, toda transformação linear sobre espaços vetoriais complexos sempre admite autovalores.

4.5 Seja $T: V \to V$ uma transformação linear. O conjunto solução $S_t = \{T(v) = t\,v\}$ é um subespaço vetorial de V.

Sejam $v_1, v_2 \in S_t$, então $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = tv_1 + tv_2 = t(v_1 + v_2)$. Portanto, $v_1 + v_2 \in S_t$.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in S_t$ temos: $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(tv) = t(\alpha v) \therefore \alpha v \in S_t$. Logo, S_t é um subespaço de V.

◆ **Exercícios** (Autovalores e autovetores)

1) Sejam A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizes inversíveis.

a) Calcule AB e BA (note que o produto entre elas origina matrizes distintas)

b) Encontre os autovalores de AB e de BA. O que se pode observar?

c) Encontre os autovetores associados de AB e de BA. O que se pode observar?

Resp**:** (a) AB = $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e BA = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$; (b) são iguais; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$

2) Ache os autovalores e autovetores correspondente das transformações lineares dadas:

(a) T(x, y)= (2y, x) Resp: $\lambda_1 = \sqrt{2}$ $v_1 = (\sqrt{2}\,y, y)$, $y \neq 0$

$\lambda_2 = -\sqrt{2}$ $v_2 = (-\sqrt{2}\,y, y)$, $y \neq 0$

(b) T(x, y) = (x + y, 2x + y) Resp: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ $v_1 = (x, \sqrt{2}\,x)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ $v_2 = (x, -\sqrt{2}\,x)$, $x \neq 0$

3) Ache os autovalores e os autovetores correspondentes das transformações lineares dadas

a) $T: R^2 \to R^2$; T(x, y) = (2y, x)

b) $T: R^2 \to R^2$; T(x, y) = (x + y, 2x + y)

c) $T: R^3 \to R^3$; T(x, y, z) = (x + y, x – y + 2z, 2x + y – z)

d) $T: P_2 \to P_2$; $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

e) $T: R^4 \to R^4$; T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)

Resp: a) $\sqrt{2}$; - $\sqrt{2}$ e [($\sqrt{2}$, 1)], [(-$\sqrt{2}$, 1)] b) 1 + $\sqrt{2}$; 1 - $\sqrt{2}$ e [(1, $\sqrt{2}$)], [(1, -$\sqrt{2}$)]
c) 2; -2; -1 e [(1, 1, 1)], [(1, -3, 1)], [(-2, 4, 1)] d) 1; -1; 1 e [(1, 0, 0), (0, 1, 1)], [(0, -1, 1)]
e) 1; 1; 1; 1 e [(0, 0, 0, 1)]

4) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

(a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 1$ $v_1 = (x, 0)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$ $v_2 = (-y, y)$, $y \neq 0$

(b) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ R: $\lambda_1 = 0$ $v_1 = (x, -x)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = 2$ $v_2 = (x, x)$, $x \neq 0$

5) Calcule os autovalores e os autovetores correspondentes das matrizes dadas

a) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) A = $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

e) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ f) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i) A = $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ j) A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resp: a) 1; -1 e [(1, 0)], [(1, -1)] b) 0; 2 e [(1, -1)], [(1, 1)]
c) $\lambda_{1,2,3} = 1$ e [(1, 0, 0)] d) $\lambda_{1,2} = 3$; $\lambda_3 = -1$ e [(1, 0, 0)], [(1, -20, 16)]
e) 1; 3; -1 e [(1, -1, 0)], [(1, 0, 1)], [(1, 2, -1)] f) 1; -1; 4 e [(1, -2, 1)], [(0, 1, -1)], [(1, 1, 1)]
g) $\lambda_{1,2,3} = -1$ e [(1, -1, 1)] h) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_{2,3} = 4$ e [(1, 0, 1)], [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]
i) $\lambda_{1,3} = -3$; $\lambda_2 = 9$ e [(2, 1, 0), (-7, 0, 1)], [(1, 1, 1)]

6) Encontre as equações características e os autovalores.

(a) A = $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda_1 = 1 \pm 2\sqrt{2}\,\mathbf{i}$

(b) A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{31}\,i}{2}$

(c) A = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{23}\,i}{2}$

(d) A = $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{73}\,i}{2}$

7) Encontre as equações características, os autovalores e os autovetores das matrizes:

(a) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda_1 = 3$ v_1 = (x, 2x), $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$ v_2 = (0, y), $y \neq 0$

(b) A = $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda = 4$ v = (3x, 2x), $x \neq 0$

(c) A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ $v_1 = (3x, 2\sqrt{3}\,x)$, $x \neq 0$

$\lambda_1 = -2\sqrt{3}$ $v_1 = (-3x, 2\sqrt{3}\,x)$, $x \neq 0$

(d) A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Resp: $\lambda = 1$, autovetor qualquer v = (x,y) tal que x, $y \neq 0$.

8) Dado a matriz A, determine os autovalores e os autovetores da matriz A

a) A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 2$, v_1 = (x, 0, 0), $x \neq 0$ Resp: $\lambda_1 = 3$, v_1 = (x, y, 0), x, $y \neq 0$

$\lambda_2 = 3$, v_2 = (x, x, -2x), $x \neq 0$ $\lambda_2 = -1$, $v_2 = (z, -\frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$

c) A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 3$, $v_1 = (x, 0, 0)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$, $v_2 = (\frac{z}{16}, -\frac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$

d) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resp: $\lambda = 1$, $v_1 = (x, 0, 0)$, $x \neq 0$

e) A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

R: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, -x, 0)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$, $v_2 = (x, 2x, -x)$, $x \neq 0$

$\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, 0, x)$, $x \neq 0$

f) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Resp: $\lambda_1 = -1$, $v_1 = (x, -2x, \frac{-x}{2})$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -2$, $v_2 = (x, -3x, x)$, $x \neq 0$

$\lambda_3 = 2$, $v_1 = (x, x, x)$, $x \neq 0$

g) A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Resp: $\lambda_1 = 1$ $v_1 = (x, 0, x)$, $x \neq 0$

$\lambda_2 = -1$, $v_2 = (x, 0, x)$, $x \neq 0$

$\lambda_3 = 4$ $v_3 = (x, x, x)$, $x \neq 0$

9) Determine todos os autovalores da matriz A sobre o conjunto dos números complexos. Encontre também os autovetores correspondentes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

Resp: $(a)\, \lambda_1 = 1 + i;$ $\lambda_2 = 1 - i;$ $v_1 = (x, ix), x \neq 0;$ $v_2 = (x, -ix), x \neq 0$

$(b)\, \lambda_1 = 1 + i;$ $\lambda_2 = 1 - i;$ $v_1 = (x, x), x \neq 0;$ $v_2 = (x, -x)\; x \neq 0$

$(c)\, \lambda_1 = \sqrt{3} + i;$ $\lambda_2 = \sqrt{3} - i;$ $v_1 = (x, -ix), x \neq 0;$ $v_2 = (x, ix), x \neq 0$

10) Sejam a e b números reais. Encontre os autovalores e os autovetores correspondentes de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ sobre o conjunto dos números complexos.

Resp: $\lambda_1 = a + bi;$ $\lambda_2 = a - bi;$ $v_1 = (x, ix), x \neq 0;$ $v_2 = (x, -ix), x \neq 0$

11) Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de A de um espaço vetorial:

(a) Real (b) Complexo

Resp: (a) $\lambda = -2, v = (2x, x, -x), x \neq 0$

(b) $\lambda_1 = -2, v_1 = (2x, x, -x), x \neq 0$; $\lambda_2 = i, v_2 = [(-1+i)y, y, (1+i)y], y \neq 0$;

$\lambda_3 = -i, v_3 = [(-1-i)y, y, (1-i)y], y \neq 0$

5

SEMELHANÇA E DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

As matrizes triangulares e matrizes diagonais são interessantes, pois seus autovalores são determinados diretamente. Portanto, seria agradável se pudéssemos relacionar uma matriz a outra matriz triangular ou diagonal de forma que ambas tivessem os mesmos autovalores.

5.1 Matrizes Semelhantes

5.1.1 Definição: Sejam A e B matrizes do tipo nxn. Dizemos que A é ***semelhante*** a B se existir uma matriz nxn invertível P tal que $P^{-1}AP=B$. Se A é semelhante a B, escrevemos A~B.

Observação: Se A~B, podemos escrever que $A=PBP^{-1}$ ou AP=PB.

Exemplo: As matrizes $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ são semelhantes.

Tome $P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calculando AP e PB temos que: AP=PB=$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

5.1.2 Teorema

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então:

a) det(A) = det(B).

b) A é invertível $\Leftrightarrow$ B é invertível.

c) A e B têm o mesmo posto.

d) A e B têm o mesmo polinômio característico.

Lembrete: O ***posto*** de uma matriz é o número de linhas não nulas de qualquer uma de suas formas escalonadas por linhas.

Demonstração do item (a): Por hipótese, as matrizes A e B são semelhantes, logo

$$A = PBP^{-1}$$

$$\det(A) = \det(PBP^{-1})$$

$$\det(A) = (\det P).(detB).(detP^{-1})$$

$$\det(A) = (\det P).(detB).\frac{1}{detP} = \det(B)$$

Demonstração do item (d): O polinômio característico de A é

$$\det(A - tI) = \det(PBP^{-1} - tI)$$
$$\det(A - tI) = \det(PBP^{-1} - tPIP^{-1})$$
$$\det(A - tI) = \det(PBP^{-1} - P(tI)P^{-1})$$
$$\det(A - tI) = \det[\mathrm{P}(B - tI)P^{-1}])$$
$$\det(A - tI) = \det(P).\det(B - tI).\det(P^{-1})$$
$$\det(A - tI) = \det(P).\det(B - tI).\frac{1}{detP}$$
$$\det(A - tI) = \det(B - tI)$$

5.2 Diagonalização

Temos a melhor situação possível quando uma matriz quadrada é semelhante a uma matriz diagonal. Como veremos logo a seguir, a possibilidade de isso ocorrer está relacionada estreitamente com os autovalores e autovetores da matriz.

5.2.1 Definição:

Uma matriz A(nxn) é ***diagonalizável*** se existe uma matriz diagonal D tal que A~D, ou seja, se existe P(nxn) invertível tal que $P^{-1}AP=D$.

Exemplo: A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável, pois, se $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, então AP=PD= $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

5.2.2 Teorema:

A matriz A(nxn) é diagonalizável $\Leftrightarrow$A tiver n autovetores LI.

Em outras palavras:

Existem P invertível e uma matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP=D$ se, e somente se, as colunas de P forem n autovetores de A, linearmente independentes, e os elementos da diagonal de D forem os autovalores correspondentes aos autovetores.

Neste caso, $P = [v_1 \quad v_2 \ \dots \ v_n]$, onde $v_1, v_2, \dots, v_n$ são os n autovetores cujas coordenadas são posicionadas em colunas, e

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

5.2.3 Definição: Chamamos de **multiplicidade algébrica** de um autovalor a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico. A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do subespaço de autovetores associados ao autovalor.

5.2.4 Exemplos: Se possível, determine a matriz P que diagonaliza

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Soluções:

a) det(A-λ I)=0 $\Rightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -(\lambda-1)^2(\lambda-2) = 0$

Os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem como autovetor os múltiplos de (1,1,1).

Para $\lambda_3 = 2$ tem como autovetor os múltiplos de (1,2,4).

Como não é possível existir 3 autovetores LI, pelo teorema anterior, A não é diagonalizável.

Observação: $\lambda = 1$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 e $\lambda = 2$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 1. Cada autovalor gera somente um autovetor, portanto a ***multiplicidade geométrica*** é 1, para qualquer autovalor.

Autovalor	MA	MG
$\lambda = 1$	2	1
$\lambda = 2$	1	1

b) det(B-λ I)=0 $\Rightarrow \lambda^2(\lambda+2) = 0$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ temos autovetores da forma (x,y,x), x,y$\neq$0, que são gerados pelos vetores v_1=(0,1,0) e v_2=(1,0,1).

Para $\lambda_3 = -2$ tem como autovetor v_3=(-1,3,1).

É fácil verificar que estes 3 vetores são LI. Pelo teorema,

$P = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível. Além disso, $P^{-1}BP$=D=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, ou que, BP=PD.

Cuidado ao trocar a ordem! Por exemplo, se $P = [v_3 \;\; v_1 \;\; v_2]$, então D=$\begin{bmatrix} \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

Observação: $\lambda_1 = 0$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 e $\lambda_3 = -2$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 1.

$\lambda_1 = 0$ gera dois autovetores e $\lambda_3 = -2$ gera um autovetor, portanto λ_1 tem ***multiplicidade geométrica*** igual a 2 e λ_3 tem ***multiplicidade geométrica*** igual a 1.

Autovalor	MA	MG
$\lambda = 0$	2	2
$\lambda = -2$	1	1

5.2.5 Teorema

Se A (nxn) têm n autovalores distintos entre si, então A é diagonalizável.

Observação: Os autovalores de uma matriz triangular são os elementos da sua diagonal principal.

Exemplo: Os autovalores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1.$

Como a dimensão da matriz é n=3 e possui 3 autovalores distintos, pelo Teorema 5.2.4, a matriz A é diagonalizável.

5.2.6 Teorema da Diagonalização

Seja A(nxn) com $k \leq n$ autovalores distintos. São equivalentes os enunciados:

i) A é diagonalizável.

ii) A união de todos os autovetores gerados pelos autovalores contém n vetores LI.

iii) A multiplicidade algébrica (MA) de cada autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica (MG).

5.2.7 Exemplos

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a) O polinômio característico da matriz A é $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Portanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ tem ***multiplicidade algébrica*** igual a 2 mas **multiplicidade geométrica** igual a 1, logo não é diagonalizável, de acordo com o Teorema da Diagonalização.

Autovalor	MA	MG
$\lambda = 1$	2	1
$\lambda = 2$	1	1

b) O polinômio característico da matriz B é $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)$. Logo, a matriz B tem dois autovalores distintos $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$. O autovalor $\lambda = 0$ tem ***multiplicidades algébrica*** e ***geométrica*** iguais a 2, e para o autovalor $\lambda = -2$, as ***multiplicidades*** são iguais a 1. Portanto, de acordo com o Teorema da Diagonalização, A é diagonalizável.

Autovalor	MA	MG
$\lambda = 0$	2	2
$\lambda = -2$	1	1

◆ **EXERCÍCIOS** (semelhança e diagonalização)

1) Verifique se os operadores lineares abaixo são diagonalizáveis.

a) T: $R^2 \to R^2$; T(x, y) = (2y, x)

b) T: $R^3 \to R^3$; T(x, y, z) = (x + y, x – y + 2z, 2x + y – z)

c) T: $R^4 \to R^4$; T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)

d) T: $R^2 \to R^2$; T(x, y) = (–6y, –x + y)

2) Utilize o teorema 5.2.2 (a matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável $\Leftrightarrow$ A tiver n autovetores LI) para verificar se A é diagonalizável.

a) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Determine se A é diagonalizável e, quando for, encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP=D$, ou, AP=PD.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4) Encontre todos os valores reais de k para os quais A é diagonalizável.

$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ $(b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(c)\ A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $(d)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Respostas (Semelhança e diagonalização de operadores)

1 - a) sim b) sim c) não d)sim

2 - a) sim b) sim c) não d) sim e) não

3 - a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Com apenas o autovetor (2,1) não é possível determinar P. Logo, A não é diagonalizável.

c) Para $\lambda = 3$ temos apenas o autovetor (1,0,0). Como não é possível determinar P com 1 vetor então A não é diagonalizável.

d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) O polinômio característico de A é $(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$. Autovalores: 1 e 2.

Para $\lambda = 1$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(0,1,-1), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

f) O polinômio característico de A é $\lambda^2(1-\lambda) = 0$.

Para $\lambda = 0$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(1,-1,1), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

g) O polinômio característico de A é $(2-\lambda)(3-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$.

Para $\lambda = 3$, a multiplicidade algébrica vale 2 e tem como autovetor

(0,1,0,0), portanto a multiplicidade geométrica vale 1. Logo, A não é diagonalizável.

h) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

4 – $(a) \forall k \in R \ tal \ que \ k \neq 1$; $(b) k = 0$; $(c) \forall k \in R$; $(d) k = 0$.

6

POLINÔMIO MÍNIMO E FORMA CANÔNICA DE JORDAN

No capítulo anterior vimos que os operadores podem ser ou não diagonalizáveis, exibindo uma base de autovetores, ou mostrando a inexistência desta base. Em casos de espaços vetoriais de baixa dimensão, este é o procedimento conveniente. Entretanto, podemos estar interessados, principalmente, em casos de espaços vetoriais de dimensão alta, onde os cálculos são longos.
Já sabemos que se $\dim V = n$ e o operador linear T tem n autovetores distintos, então T é diagonalizável. No caso geral, a resposta está ligada ao aspecto de um polinômio que chamaremos de *polinômio mínimo do operador* T. Para isso, vamos introduzir a definição de polinômios calculados em matrizes.

6.1 Definição: Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então, p(A) é a matriz

$$p(A) = a_n \boldsymbol{A^n} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}.$$

Quando $p(A) = 0$, dizemos que o polinômio anula a matriz A.

6.1.1 Exemplo: Sejam os polinômios $p(x) = x^2 - 9 \ e \ q(x) = 2x + 3$

Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ então

$$p(A) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2 - 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$q(A) = 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Então p(x) anula A e q(x) não anula A.

6.2 Definição: Seja A uma matriz quadrada. O *polinômio mínimo* de A é um polinômio

$$m(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0$$

tal que

(i) m(A)=0, isto é, m(x) anula a matriz A.

(ii) m(x) é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam A.

Observação: O coeficiente do termo x^k do polinômio mínimo é 1.

A seguir serão apresentados alguns resultados envolvendo polinômio mínimo que indicarão um procedimento que possibilita determinar se um operador linear é diagonalizável ou não, sem calcular os autovalores.

6.3 Teorema: Sejam $T: V \to V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n. Então T é diagonalizável se, e somente se o polinômio mínimo de $[T]_\alpha^\alpha$ é da forma

$$m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_r)\ com\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\ distintos$$

O problema que consiste em determinar se T é diagonalizável reduz-se em encontrar o polinômio mínimo de T.

6.4 Teorema de Cayley-Hamilton: Seja $T: V \to V$ um operador linear, α uma base de V e p(x) o polinômio característico de T. Então

$$p([T]_\alpha^\alpha) = 0$$

Isto significa que o polinômio característico é um candidato ao polinômio mínimo porque ele satisfaz a condição (i) da definição 6.2.

6.5 Exemplo: Demonstração do teorema de Cayley-Hamilton no caso 2×2.

Seja $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então o polinômio característico é

$$p(\lambda) = det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc.$$

Logo

$$p([T]_\alpha^\alpha) = \left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\left(d\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) - bc\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p([T]_\alpha^\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -c & a - d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d - a & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.6 Teorema: As raízes do polinômio mínimo são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico.

Estes dois últimos teoremas juntos nos dizem como achar o polinômio mínimo de um operador linear $T: V \to V$. O polinômio mínimo deve ser de grau menor ou no máximo igual ao do polinômio característico e ainda deve ter as mesmas raízes.

6.6.1 Exemplo:

Seja $T: V \to V$ um operador linear e α uma base de V. Suponhamos que o polinômio característico de T seja $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 5)$.

Então o seu polinômio mínimo será um dos polinômios:

$$p_1(x) = (x-3)\ \ (x-1)\ \ (x+5)$$
$$p_2(x) = (x-3)^2(x-1)\ \ (x+5)$$
$$p_3(x) = (x-3)\ \ (x-1)^2(x+5)$$
$$p_4(x) = (x-3)\ \ (x-1)^3(x+5)$$
$$p_5(x) = (x-3)^2(x-1)^2(x+5)$$
$$p_6(x) = (x-3)^2(x-1)^3(x+5)$$

Como o polinômio mínimo é o de menor grau que anula $[T]_\alpha^\alpha$, verificamos primeiramente se $p_1([T]_\alpha^\alpha) = 0$. Em caso afirmativo, $p_1(x)$ será o polinômio mínimo. Se $p_1([T]_\alpha^\alpha) \neq 0$, testamos $p_2([T]_\alpha^\alpha)$ e assim sucessivamente. Na pior das hipóteses o polinômio mínimo será o próprio polinômio característico.

Se voltarmos ao primeiro teorema (6.3) veremos que o operador linear T será diagonalizável se $p_1(x)$ for o polinômio mínimo. Então, vamos reestruturar o teorema 6.3.

6.7 Teorema: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_r)$$

anular a matriz de T.

6.7.1 Exemplo: O operador linear $T: R^4 \to R^4$ definido por $T(x,y,z,t) = (3\mathrm{x} - 4\mathrm{z}, 3\mathrm{y} + 5\mathrm{z}, -\mathrm{z}, -\mathrm{t})$ é diagonalizável?

Resolução: Seja $\alpha = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ a base canônica de R^4. Logo, a matriz mudança de base é

$$A = [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o polinômio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$, ambos com multiplicidade 2. Então, os candidatos a polinômio mínimo são

$$p_1(\lambda) = (3-\lambda)\ \ (-1-\lambda)$$
$$p_2(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)$$
$$p_3(\lambda) = (3-\lambda)\ \ (-1-\lambda)^2$$
$$p_4(\lambda) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda)^2$$

Notamos que

$$p_1(A) = (3I - A)(-I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{4\times 4},$$

além disso, dentre os candidatos, $p_1(\lambda)$ é o de menor grau. Logo, $p_1(\lambda)$ é o polinômio mínimo. Pelo Teorema 6.7, como $p_1(\lambda)$ anula a matriz de T então T é diagonalizável.

◆ **Exercício:**

Determine o polinômio mínimo da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e verifique se a matriz é diagonalizável.

6.8 Teorema

O polinômio mínimo m(t) de A divide todo polinômio que tem A como zero.

Em particular, m(t) divide o polinômio característico $p(t)$ de A.

6.9 Matriz Companheira

Considere o polinômio $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0$. Seja $A_{n\times n}$ contendo 1 logo abaixo da diagonal principal, o negativo dos coeficientes na última coluna e zeros nas demais posições, como segue:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Então, A é denominada a **matriz companheira** de $f(t)$. Além disso, o polinômio mínimo $m(t)$ e o polinômio característico $p(t) = \det(tI - A)$ são ambos iguais a $f(t)$.

6.9.1 Exemplo: Determine o polinômio mínimo $m(t)$ de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e verifique se confere a teoria da matriz companheira.

Solução: O polinômio característico é

$$p(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t & 0 & -6 \\ -1 & t & 11 \\ 0 & -1 & t-6 \end{vmatrix}$$

$$p(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$$

Além disso, $p(t) = (t-1)(t-2)(t-3) = m(t)$

Portanto, $p(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$ confere com a teoria da matriz companheira, onde $a_0 = -6$, $a_1 = 11, a_2 = -6$.

6.9.2 Exemplo: Determine uma matriz A cujo polinômio mínimo seja $f(t) = t^3 + 5t^2 - 3t - 2$.

Solução: Como $a_0 = -2$, $a_1 = -3, a_2 = 5$, então a matriz companheira de $f(t)$ é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

6.10 Potência de uma matriz

Nesta seção mostraremos como utilizar a diagonalização para calcular a potência de uma matriz.

Considere a matriz $A_{n\times n}$ e a matriz invertível $P_{n\times n}$. Então

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}AIAP = P^{-1}A^2P$$

Pode-se provar por indução que para qualquer inteiro positivo k,

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

Se A for diagonalizável e se $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal, então

$$(P^{-1}AP)^k = D^k$$

$$P^{-1}A^kP = D^k$$

Resolvendo esta equação em A^k obtemos

$$PP^{-1}A^kP = PD^k$$

$$A^kP = PD^k$$

$$A^kPP^{-1} = PD^kP^{-1}$$

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

6.10.1 Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que A é diagonalizável e encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

b) Utilize a equação $A^k = PD^kP^{-1}$ para determinar A^n e A^{10}.

Solução:

a) $\det(A - tI) = (1-t)(2-t) = 0$.

Para o autovalor $t = 1$ temos como autovetor os múltiplos de $v_1 = (1,1)$.

Para o autovalor $t = 2$ temos como autovetor os múltiplos de $v_2 = (0,1)$.

Como encontramos 2 autovetores LI então a matriz A é diagonalizável.

Portanto,

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Daí, $P^{-1}AP = D$.

b) $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^n & 2^n \end{bmatrix}$$

Consequentemente,

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1023 & 1024 \end{bmatrix}$$

6.11 Forma Canônica de Jordan

Sabemos que nem todo operador $T: V \to V$ em um espaço vetorial de dimensão finita é diagonalizável, ou seja, nem sempre existe uma base β de V tal que a matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal. Entretanto, para várias aplicações, é suficiente que exista uma base β tal que a matriz $[T]_\beta^\beta$ tenha uma forma bastante próxima da forma diagonal chamada **forma canônica de Jordan**.

6.11.1 Definição: Uma matriz $J, n \times n,$ está na forma canônica de Jordan, se ela é da forma

$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_i} \end{bmatrix}$, em que J_{λ_i} é igual a

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix},$$

para $j = 1, \dots, m$. A matriz J_{λ_i} é chamado **bloco de Jordan**.

A representação para blocos de Jordan de dimensão 1 é $[\lambda_i]$.

6.11.2 Exemplo: As matrizes

$$J1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$J3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ J4 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

estão na forma canônica de Jordan. A primeira, $J1$, é formada de dois blocos de Jordan, o primeiro bloco é 3×3 e o segundo 1×1. A segunda matriz, $J2$, é formada por dois blocos de Jordan 2×2. A terceira, por somente um bloco e a última por 4 blocos 1×1.

A matriz $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **não** está na forma canônica de Jordan. Como os elementos da diagonal não são iguais, ela teria que ser formada por pelo menos um bloco de Jordan e $[-1]$ deveria ser um bloco de Jordan 1×1. Entretanto, a entrada imediatamente acima de 2 não é igual a 0.

6.11.3 Exemplo: Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan para um operador cujo polinômio característico é dado por $p(t) = (2 - \lambda)^3 (1 - \lambda)$.

Solução: Note que o operador linear T apresenta os autovalores 2 e 1. Como as multiplicidades algébricas (MA) e geométrica (MG) do **autovalor 1** são iguais a um, então o único bloco correspondente a este autovalor é $[1]$.

Com relação ao **autovalor 2**, a sua MA é 3. Se sua MG for 3 então existem 3 blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a $[2]$. Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se a MG do autovalor 2 for dois, então existem dois blocos correspondentes a este autovalor que são da forma

$$[2], \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se a MG do autovalor 2 for um, então existe um bloco correspondente a este autovalor dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1) Determine todas as formas canônicas possíveis para um operador linear $T: V \to V$ cujo polinômio característico é $p(t) = (t-2)^3(t-5)^2$ (Coleção Schaum)

2) Determine todas as formas canônicas de Jordan J possíveis para uma matriz de ordem 5 cujo polinômio mínimo é $\mathrm{m}(t) = (t-2)^2$ (Coleção Schaum)

◆ **EXERCÍCIOS** (Polinômio Mínimo e Forma Canônica de Jordan)

1) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) A é diagonalizável? b) Encontre seu polinômio mínimo.

2) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que A e B têm polinômios característicos diferentes (e que, assim, não são semelhantes), mas têm o mesmo polinômio mínimo.

3) Determine o polinômio mínimo m(t) da matriz (onde $\alpha \neq 0$): $B = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha & 0 \\ 0 & \lambda & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

4) Ache o polinômio mínimo m(t) da matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

5) Determine uma matriz A cujo polinômio mínimo seja

(a) $f(t) = t^3 - 8t^2 + 5t + 7$ (b) $f(t) = t^4 - 3t^3 - 4t^2 + 5t + 6$

6) Use a equação $A^k = PD^kP^{-1}$ para calcular a potência indicada da matriz.

$a)$ A^{11} onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$.

$b)$ A^{1000} onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$c)$ A^{-1000} onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

7) Encontre A^n se n é um inteiro positivo e

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$; $b)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Respostas (Polinômio Mínimo e Forma Canônica de Jordan)

1 (a) não (b) p(x) = $(2 - x)^2 \cdot (3 - x) = - x^3 + 7x^2 - 16x + 12$

3) $\mathrm{m}(t) = p(t) = (t - \lambda)^3$

4) $\mathrm{m}(t) = (t - 4)^3$

5) (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$6a)\ D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$

$$A^{11} = PD^{11}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 10237 & -2047 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10245 & -2048 \end{bmatrix}$$

$$6b)\ A^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{1000} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$6c)$ I (matriz identidade)

$$7a)\ A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$7b)\ \begin{bmatrix} (3^n + 3(-1)^n)/4 & (3^{n+1} - 3(-1)^n)/4 \\ (3^n - (-1)^n)/4 & (3^{n+1} + (-1)^n)/4 \end{bmatrix}$$

7

PRODUTO INTERNO

7.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores u e v, associa um número real, indicado por $< u, v >$, satisfazendo as propriedades:

P_1) $< v, v > \geq 0$ para todo vetor v, e

$< v, v > = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

P_2) $<\propto u, v> = \propto < u, v >, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

P_3) $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$.

P_4) $< u, v > = < v, u >$.

- **Exercícios:**

1) No espaço vetorial $V=\mathbb{R}^2$, mostre que a aplicação que associa cada par de vetores $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ ao número real $< u, v > = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$ é um produto interno.

2) Em relação ao produto interno $< u, v > = 2x_1x_2+5y_1y_2$, calcular $< u, v >$ para $u=(2,1)$ e $v=(3,-2)$.

Observações:

i) O produto interno examinado neste exercício é diferente do produto interno usual do $\mathbb{R}^2$ que é definido por: $< u, v > = x_1x_2 + y_1y_2$. Portanto, é possível a existência de mais de um produto interno no mesmo espaço vetorial.

ii) Se $u=(x_1,y_1,z_1)$ e $v=(x_2,y_2,z_2)$ são vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$, o número real $< u, v > = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ define o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.

De forma análoga, se $u=(x_1,x_2,...,x_n)$ e $v=(y_1,y_2,...,y_n)$, o número real $< u, v > = x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ define o produto interno usual no $\mathbb{R}^n$.

7.2 Espaço vetorial euclidiano

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um ***espaço vetorial euclidiano***.

7.3 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $<,>$. Definimos a norma (ou comprimento) de um vetor v e, relação a este produto interno por $\|v\| = \sqrt{<v,v>}$.

Se $\|v\| = 1$, isto é, $<v,v> = 1$, v é chamado vetor unitário. Dizemos, neste caso, que v é normalizado.

Todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, da seguinte forma: $u = \frac{v}{\|v\|}$.

Observe que o módulo de v depende do produto interno utilizado: se o produto interno muda, o módulo altera-se.

- **Exercícios:**

1. Dado o vetor v=(-2,1,2) $\in \mathbb{R}^3$, calcular a norma de v e normalizar v, considerando que:

(a) $\mathbb{R}^3$ está munido do produto interno usual

(b) Em $\mathbb{R}^3$ está definido o produto interno $<v_1,v_2> = 3x_1x_2+2y_1y_2+z_1z_2$, sendo $v_1=(x_1,y_1,z_1)$ e $v_2=(x_2,y_2,z_2)$

2. Dado o espaço vetorial V=$\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual, calcular o escalar m de modo que ||v||=7 onde v=(6,-3,m).

3. Dado o espaço das funções contínuas no intervalo [0,1] em que o produto interno é

$$<f,g>= \int_0^1 f(x).g(x)dx,$$

a) Determine o produto interno de f(x)=x+1 e g(x)=2x

b) Calcular a norma de f(x)=x+1

c) Normalizar a função f(x)=x+1

7.4 Propriedades do módulo de um vetor

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

(i) ||v||$\geq 0,\ \ \forall u \in V\ e\ \left||v|\right| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

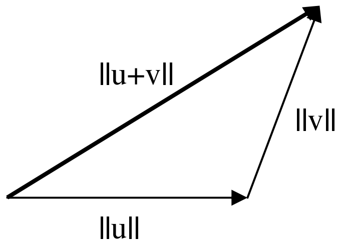
(ii) $\left||\alpha u|\right| = |\alpha|.\left||u|\right|,\ \forall u \in V, \forall \alpha \in R$

Demonstração de (ii):

$$\left||\alpha u|\right| = \sqrt{<\alpha u,\alpha u>} = \sqrt{\alpha<u,\alpha u>} = \sqrt{\alpha<\alpha u,u>} = \sqrt{\alpha^2<u,u>} = |\alpha|\sqrt{<u,u>} = |\alpha|.||u||$$

(iii) ||u+v||$\leq$||u||+||v||, $\forall u,v \in V$

Observação: ||u+v||$\leq$||u||+||v|| é denominado desigualdade de Shwarz ou inequação de Cauchy-Schwarz ou Desigualdade triangular.



Interpretação Geométrica no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

"A soma das medidas de dois lados de um triângulo é maior do que a medida do terceiro lado."

7.5 Ângulo entre dois vetores

Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vetores não-nulos de um espaço vetorial euclidiano $\boldsymbol{V}$. A partir da desigualdade de Shwarz, pode-se chegar ao ângulo de dois vetores dados por:

$$cos\theta = \frac{<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>}{||u||.||v||}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

- **Exercícios:**

No espaço vetorial das matrizes quadradas V=M(2x2), dadas duas matrizes quaisquer, $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, o número real $<u,v>= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ define um produto interno em M(2x2).

Sabendo que $u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

a) ||u+v|| b) O ângulo entre u e v

7.6 Distância entre dois vetores

Chama-se distância entre dois vetores (ou pontos) u e v, o número real, representado por d(u,v), definido por: d(u,v) = ||u-v||

Se u = (x_1,y_1) e v = (x_2,y_2) são vetores (ou pontos) do $\mathbb{R}^2$, com produto interno usual, temos que:

$$d(u,v)= ||u-v|| =|(x_1-x_2, y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Se $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ pertencem a $\mathbb{R}^n$ e considerando o produto interno usual, temos que:

$$d(a,b) = ||a-b|| = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2}$$

7.7 Vetores ortogonais

7.7.1 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $<,>$. Diz-se que dois vetores u e v são ortogonais (em relação a este produto interno) se $<u,v>=0$. Neste caso utiliza-se a notação $u \perp v$.

7.7.2 Propriedades

(i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$.

(ii) Se $u \perp v$ então $v \perp u$

(iii) Se $v \perp w$ para todo $w \epsilon V$, então $v = 0$.

(iv) Se $u_1 \perp v$ e $u_2 \perp v$, então $(u_1 + u_2) \perp v$

(v) Se $u \perp v$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\alpha u \perp v$.

7.7.3 Exemplos:

1) Os vetores u=(2,7) e v=(-7,2) de $\mathbb{R}^2$, munido do produto interno usual, são ortogonais pois $< u, v >= 2.(-7) + 7.2 = 0$.

2) Os vetores u=(-3,2) e v=(4,3) são ortogonais no espaço vetorial V=$\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno $<(x_1,y_1),(x_2,y_2)>=x_1.x_2+2y_1y_2$.

7.8 Conjunto ortogonal de vetores

Dado um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1,v_2,...,v_n\} \subset V$ é ortogonal, se quaisquer dois vetores distintos são ortogonais entre si, isto é, $< v_i, v_j >= 0$ para $i \neq j$.

7.8.1 Teorema: Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é linearmente independente.

7.8.2 Exemplos

1) Em relação ao produto interno usual, a base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\{i, j, k\}$, é um conjunto ortogonal pois $< i, j >=< j, k >=< k, i >= 0$.

2) Dado o produto interno $< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$, verificar que $\{u, v, w\}$ é ortogonal, onde $u = (1,2,3), v = (4, -3,0)$ e $v = (3,6, -11)$.

Resolução:

$$< u, v >= 3.1.4 + 2.2.(-3) + 3.0 = 0,$$

$$< u, w >= 3.1.3 + 2.2.6 + 3.(-11) = 0,$$

$$< v, w >= 3.4.3 + 2.(-3).6 + 0.(-11) = 0.$$

◆ **Exercícios**

1) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, verifique que o conjunto {(1,2-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} é ortogonal em relação ao produto interno usual.

2) Determine os vetores $w \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|w\| = 1$ e $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle = 0$ em relação ao produto interno usual, em que $u = (1,1,1)$ e $v = (1,-1,0)$.

7.8.3 Base ortogonal

Se $\dim(V) = n$ então qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais constitui uma base ortogonal de V.

7.8.4 Base ortonormal

Uma base $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é ortonormal se todos os vetores de β são unitários e dois a dois ortogonais, isto é:

$$< v_i, v_j > = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$$

7.8.5 Exemplos

1) As bases canônicas do $\mathbb{R}^n$ são bases ortonormais em relação ao produto interno usual.

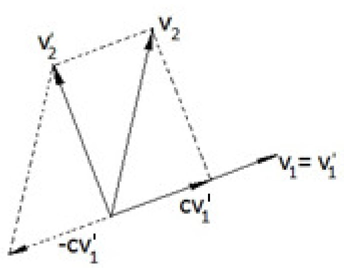
2) A base $B = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ do $\mathbb{R}^2$ é ortonormal em relação ao produto interno usual.

3) Uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal, normalizando cada um de seus vetores. Assim, da base ortogonal B={(1,2-3),(3,0,1),(1,-5,-3)} do $\mathbb{R}^3$, relativamente ao produto interno usual, pode-se obter a base ortonormal B'={u_1,u_2,u_3}.

7.9 Processo de ortogonalização de GRAM-SCHMIDT

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma base ortonormal. Inicialmente vamos dar uma descrição deste processo de ortonormalização para uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$.

Seja $v'_1 = v_1$. Precisamos encontrar a partir de v_2 um novo vetor v'_2 ortogonal a v'_1, isto é, $\langle v'_2, v'_1 \rangle = 0$. Para isto tomamos $v'_2 = v_2 - cv'_1$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle v'_2, v'_1 \rangle = 0$, ou seja, $\langle v_2 - cv'_1, v'_1 \rangle = 0$. Isto implica que $c = \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle}$.



Ficamos então com

$v'_1 = v_1$

$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$

Observe que v'_2 foi obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v'_1 e que v'_1 e v'_2 são vetores ortogonais não nulos. Podemos então normalizá-los,

$$u_i = \frac{v'_i}{\|v'_i\|}$$

obtendo uma base $\beta' = \{u_1, u_2\}$ que é ortonormal.

7.9.1 Seja $\beta = \{(2,1), (1,1)\}$ uma base de R^2. Obtenha a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.

Sejam $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$. Considere

$v'_1 = v_1 = (2,1)$

$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 = (1,1) - \frac{3}{5}(2,1) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Normalizando estes vetores obtemos: $u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Então, $\beta' = \{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal.

O procedimento de ortogonalização de dois vetores pode ser generalizado para uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Continuando o raciocínio do caso anterior, estabeleça que $v'_3 = v_3 - mv'_2 - kv'_1$ onde m e k satisfazem as equações $\langle v'_3, v'_1 \rangle = 0$ e $\langle v'_3, v'_2 \rangle = 0$. Desenvolvendo estas duas condições obtemos

$$k = \frac{\langle v_3 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle}, \quad m = \frac{\langle v_3 , v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle}$$

E portanto,

$v'_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 , v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \frac{\langle v_3 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$

O vetor v'_3 é obtido de v_3, subtraindo-se suas projeções sobre v'_1 e v'_2. Procedendo de maneira análoga, obtemos os vetores $v'_4, \cdots, v'_n$.

Assim, a partir de uma base $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ de um espaço vetorial V, construímos a base ortogonal $\{v'_1, \cdots, v'_n\}$ dada por:

$v'_1 = v_1$

$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$

$$v'_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 , v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \frac{\langle v_3 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v'_n = v_n - \frac{\langle v_n , v'_{n-1} \rangle}{\langle v'_{n-1}, v'_{n-1} \rangle} v'_{n-1} - \cdots - \frac{\langle v_n , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1$$

Este procedimento é conhecido como *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*.

Se quisermos agora obter uma base ortonormal, basta normalizarmos os vetores v'_i por $u_i = v'_i/\|v'_i\|$

7.9.2 Exemplo: Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de R^3 onde $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,2,1)$, $v_3 = (0,0,1)$. Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto usual. Utilizando o processo de Gram-Schmidt temos:

$$v'_1 = v_1 = (1,1,1)$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 = (0,2,1) - \frac{3}{3}(1,1,1) = (-1,1,0)$$

$$v'_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 , v'_2 \rangle}{\langle v'_2, v'_2 \rangle} v'_2 - \frac{\langle v_3 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 = (0,0,1) - 0(-1,1,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Normalizando os vetores $v'_1, v'_2 \ e \ v'_3$ temos

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad u_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad u_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

e $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormal.

Observe que dos vetores originais da base β o único que foi preservado, pelo menos em sua direção, foi o vetor v_1, a partir do qual foi iniciado o processo de ortogonalização. Partindo da mesma base β poderemos obter uma outra base ortogonal β' iniciando o processo, por exemplo, a partir de v_3.

7.9.3 Exemplo

Determine uma base ortonormal (em relação ao produto interno usual) para o seguinte subespaço de R^3: $V = \{(x, y, z) \in R^3; x - y + z = 0\}$.

Solução: $V = \{(y - z, y, z);\ y, z \in R\}$. Logo, $V = [(1,1,0), (-1,0,1)]$. A partir desses vetores determina-se uma base ortonormal utilizando o processo de Gram-Schmidt:

$$v'_1 = v_1 = (1,1,0)$$

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 , v'_1 \rangle}{\langle v'_1, v'_1 \rangle} v'_1 = (-1,0,1) - \frac{(-1)}{2}(1,1,0) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Portanto, $\beta' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}$ é uma base ortonormal.

◆ **Exercício**

Sejam $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(0,1,1)$ e $v_3=(0,0,1)$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Esses vetores constituem uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ não ortogonal em relação ao produto interno usual. Obtenha uma base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ que seja ortonormal.

Resp: $u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $u_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $u_3 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

◆ **EXERCÍCIOS** (Produto Interno)

Nos problemas de 1 e 2 considerando os vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ do espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, verificar quais funções $F: V \times V \to \mathbb{R}$, definidos em cada um deles, são produtos internos em V.

1) $F(v_1, v_2) = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

2) $F(v_1, v_2) = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = {x_1}^2 + {x_2}^2 + y_1y_2$

Nos problemas 3 e 4, considerando os vetores u = (x_1, y_2) e v(x_2,y_2), calcular os produtos internos indicado em casa um deles.

3) $< u, v >= x_1.x_2 + y_1.y_2$, para u = (1, -1) e v = (-7, 4).

4) $< u, v >= 3x_1.x_2 + 4y_1.y_2$, para u = (2, 3) e v = (-5, 3).

Nos problemas 5 e 6, considerando os vetores u = (x_1, y_1, z_1) e v = (x_2, y_2, z_2) calcular os produtos internos indicados em cada um deles.

5) $< u, v > = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ para u = (6, 4, 2) e v = (2, 3, 5)

6) $< u, v > = 4x_1.x_2 + 2y_1.y_2 + 6z_1z_2$ para u = (1, 1, 1) e v = (1, 0, 1)

Nos problemas 9 e 10, calcular o módulo de cada um dos vetores do $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno $< v_1, v_2 > = 4x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1.z_2$, com $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

9) v = (3, -1, 4)

10) v = (-2, -5, -7)

Nos problemas 15 a 17 calcular a distância entre os vetores u e v, adotando o produto interno usual.

15) u = (5, 6) e v = (-10, 7)

16) u = (-3, 1, 9) e v = (8, 14, 6)

17) u = (4, 1, 7, 9) e v = (2, -3, -5, -11)

Nos problemas 18 a 21, considerando o produto interno usual no $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$, calcular o ângulo entre os pares de vetores dado em cada um deles.

18) u = (1, 0, -3) e v = (3, 1, 0)

19) u = $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e v = $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

20) u = (3, 1, -7) e v = (0, 1, 3)

21) u = (1, 2, -1, 2) e v = (0, 1, -1, -2)

22) Dadas duas matrizes quaisquer $u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, do espaço vetorial $V = M(2 \times 2)$, munido do produto inteiro $< u, v > =$ $a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2+d_1.d_2$ e dados os vetores u = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e v = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, calcular: (a) ||u + v||; (b) d(u, v); (c) o ângulo entre u e v.

23) Considerando no $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual, calcular os valores de m para os quais os vetores u e v sejam ortogonais.

a) u = (3m, 2, -m) e v = (-4, 1, 5)

b) u = (0, m-1, 4) e v = (5, m-1, -1)

24) Calcular um vetor v simultaneamente ortogonal aos vetores v_1= (1, 1, 2), v_2 = (5, 1, 3) , do espaço vetorial V = $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

25) Calcular um vetor unitário u simultaneamente ortogonal aos vetores v_1 = (1, -1, 2) e v_2 = (2, 1, 0) do espaço vetorial V = $\mathbb{R}^3$ em relação ao produto interno usual.

26) Dado o espaço vetorial $V = M_{(2\times2)}$, munido do produto interno definido no problema 22, calcular “x” de modo que:
M = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ e V = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, sejam ortogonais.

27) Sendo V = $\mathbb{R}^4$, munido do produto interno usual, determinar um vetor não nulo v $\in$ $\mathbb{R}^4$, simultaneamente ortogonal a v_1 = (1, 1, 1, -1) e v_2 = (1, 2, 0, 1) e v_3 = (-4, 1, 5, 2).

28) O conjunto B = {(2,-1) , (K, 1)} é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno.

$$<(x_1,y_1), (x_2,y_2)> = 2x_1.x_2 + x_1.y_2 + x_2.y_1 + y_1.y_2$$

Calcular o valor de K e obter, a partir de B uma base B´ ortonormal em relação ao produto interno dado.

Nos problemas 29 a 31, é dada em cada uma deles, uma base A, em relação ao produto interno usual. Determinar, a partir de A:

a) Uma base ortogonal B, utilizando o processo ortogonalização de Gram-Schmidt.
b) Uma base ortonormal C, normalizando cada vetor de B.

29) A = { v_1 = (3, 4), v_2 = (1, 2)}

30) A = { v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 2)}

31) A = { v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 3, 4)}

32) Determinar os vetores (a,b,c) para que o conjunto B={(1,-3,2), (2,2,2), (a,b,c)} seja uma base ortogonal do R^3 em relação ao produto interno usual.

33) Em $P_2(R)$ com o produto interno dado por $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, calcular a norma de $f(t)$ onde: (a) $f(t) = t$; (b) $f(t) = -t^2 + 1$

Resp. (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; (b) $\sqrt{\frac{8}{15}}$

34) No espaço vetorial $P_3(R)$ considere o produto interno definido anteriormente. Calcular $\langle f(t), g(t)\rangle, \|f(t)\|, \|g(t)\|, \|f(t)+g(t)\|$, quando $f(t) = t^3 - t - 1$ e $g(t) = t^2 + 1$.

Resp: $\frac{-5}{3}, \sqrt{\frac{331}{210}}, \sqrt{\frac{28}{15}}, \sqrt{\frac{23}{210}}$

35) Considere em $P_2(R)$ o produto interno definido no exercício 1. Nessas condições, para que valor de m, $f(t) = mt^2 - 1$ é ortogonal a $g(t) = t$? Resp: m=2

36) Mesmo enunciado do exercício anterior mudando somente o produto interno: $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Resp: Para todo m real.

37) Seja β uma base de V. Utilize o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal β' de V em relação ao produto interno usual.

a) V=R^2, $\beta = \{(1,2),(2,1)\}$

b) V=R^3, $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,0)\}$

Resp. (b) $B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

38) Seja $V = R^2$ (espaço vetorial) e os vetores $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. A função $\langle u,v\rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2$ define um produto interno em R^2. Ache uma base ortonormal β' de R^2 a partir da base $\beta = \{(-1,1),(1,1)\}$. Resp. $\beta' = \{(-1,1),(0,1)\}$

39) Seja o espaço das funções contínuas em $P_2(\mathbb{R})$ no intervalo [0,1] em que o produto interno é

$$< r, s >= \int_0^1 r(x).s(x)dx.$$

A partir da base de $P_2(\mathbb{R})$, $\alpha = \{f(x),\ g(x),\ h(x)\}$, construa uma base ortoonal α' em relação ao produto interno dado, onde

$f(x) = x,\ \ g(x) = x^2 - 1,\ \ h(x) = 1.$

Resp:

$f' = f = x$

$$g' = g - \frac{\langle g, f'\rangle}{\langle f', f'\rangle} f' = -1 + \frac{3}{4}x + x^2$$

$$h' = h - \frac{\langle h, f'\rangle}{\langle f', f'\rangle} f' - \frac{\langle h, g'\rangle}{\langle g', g'\rangle} g'$$

$\langle f', f'\rangle = \frac{1}{3}$, $\langle g, f'\rangle = \frac{-1}{4}$, $\langle h, f'\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle h, g'\rangle = \frac{-7}{24}$

RESPOSTAS (Produto Interno)

1) É produto interno em V.

2) Não é produto interno em V.

3) $< u, v >= -11$ 4) $< u, v >= 6$ 5) $< u, v >= 34$ 6) $< u, v >= 10$

9) $||\boldsymbol{v}|| = 3\sqrt{6}$ 10) $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{115}$

15) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sqrt{226}\, u.c.$ 16) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sqrt{299}\, u.c.$ 17) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2\sqrt{141}\, u.c.$

18) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right) \cong 73°$ 19) $\theta = 0°$

20) $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{20\sqrt{590}}{590}\right) \cong 145°$ 21) $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{15}}{30}\right) \cong 97°$

22) a) $||\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}|| = \sqrt{19}\, u.c.$ b) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sqrt{35}\, u.c.$ c) $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{9}\right) \cong 108°$

23) a) $m = \frac{2}{17}$ b) $m = 3\ ou\ m = -1$

24) $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v1}$ e $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v2}$, se $\boldsymbol{v} \in S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = 7x, z = -4x)\}$. Por exemplo, para $x = 1$, temos $\boldsymbol{v} = (1,7,-4)$.

25) $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v1}$ e $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v2}$, se $\boldsymbol{u} = k\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}, \frac{-4\sqrt{29}}{29}, \frac{-3\sqrt{29}}{29}\right)$, para $\forall k \in \mathbb{R}$.

26) $x = 12$

27) $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v1}, \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v2}$ e $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{v3},$ se $\boldsymbol{v} \in V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ y = -\frac{8}{9}x \ , z = \frac{2}{3}x, w = \frac{7}{9}x\}$.

Por exemplo para $x = 1$, temos $\boldsymbol{v} = \left(1, -\frac{8}{9}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right)$.

28) $k = \frac{-1}{3}$ $\quad B' = \left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

29) $B = \left\{(3,4), \left(\frac{-8}{25}, \frac{6}{25}\right)\right\}$ $\quad C = \left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

30) $B = \left\{(1,0,0), (0,1,1), \left(0, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ $\quad C = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

31) $B = \left\{(1,0,1), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{-7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)\right\}$ $\quad C = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

32) (-5t, t, 4t), $t \neq 0$